

CWI Syllabus 41

Vakantiecursus 1996

Chaos

ISBN 90 6196 464 4
NUGI-code: 811

Copyright ©1996, Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam
Printed in the Netherlands

Inhoud

Ten Geleide <i>A.W. Grootendorst</i>	
Inleiding <i>A.W. Grootendorst</i>	1
De Werveltheorie van Descartes <i>J.A. van Ruler</i>	9
De Newtoniaanse Kosmos <i>C. de Pater</i>	19
Henri Poincaré <i>F. Verhulst & H.W. Broer</i>	47
Dynamische Systemen en Bifurcaties <i>I. Hoveijn</i>	63
Symmetrie en Chaos <i>J. van de Craats</i>	81
Chaos en Fractals – een Voorbeeld <i>J.M. Aarts</i>	93
Chaos en het Weer <i>F. Selten</i>	109
Lijst van sprekers	122



Ten Geleide

A.W. Grootendorst

De vakantiecursus 1996 is wel een zeer bijzondere, immers de vijftigste in een reeks die in 1946 van start is gegaan. Om misverstand te voorkomen: het is inderdaad 'wèl geteld' de vijftigste, doordat in 1954 –in verband met het International Congress of Mathematicians in Amsterdam in dat jaar– geen vakantiecursus gegeven is.

Het spreekt welhaast vanzelf dat in deze bijzondere cursus naast het hoofdthema –dit jaar de Chaostheorie– ook de geschiedenis van het instituut Vakantie-cursus en de evolutie daarvan in de tijd aandacht zal krijgen.

Daartoe is naast het gebruikelijke aantal voordrachten en het 'oefenuurtje', extra plaats ingeruimd voor een beknopte beschouwing over de onderwerpen die zoal aan de orde zijn geweest en over de ontwikkeling tot de structuur die deze cursussen in de laatste jaren hebben gekregen.

Deze structuur laat zich als volgt karakteriseren: uitgangspunt is veelal een ontwikkeling die in het (vaak zelfs verre) verleden op gang kwam, waarna de effecten ervan in het heden het centrale het onderwerp van de cursus vormen.

Deze inleidende voordracht zal verzorgd worden door ondergetekende.

Met opzet is het bij een inleiding gelaten. Een vakantiecursus die geheel gewijd zou zijn aan beschouwingen over vakantiecursussen zou een 'metacursus' zijn en dat is uiteraard niet de bedoeling.

Het eigenlijke thema is een begrip dat tegenwoordig zeer in de belangstelling staat en een duidelijk interdisciplinair karakter heeft: Chaos.

Hierbij is ook nu weer de hierboven gesignaleerde structuur gekozen met allereerst drie voordrachten die ons naar het verleden verplaatsen.

De eerste daarvan is gewijd aan de werveltheorie van Descartes, wiens geboortejaar nu juist 400 jaren achter ons ligt. Volgens Descartes kan de natuur streng deterministisch verklaard worden uitgaande van wervelende stromen van stoffelijke deeltjes. *Dr. J.A. van Ruler* zal in zijn voordracht deze theorie uiteenzetten.

De volgende voordracht, die van *Dr. C. de Pater*, gaat in op de kritiek die Newton had ten aanzien van de theorieën van Descartes en schetst de leer die Newton daar tegenover stelde, een leer die vervat is in de beroemde *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Deze voordracht besluit met het wereldbeeld

van Laplace, waarvan een strakke gedetermineerdheid en voorspelbaarheid van het universum de kern vormt.

Het derde paneel in dit drieluik is de voordracht van *Prof. Dr. H.W. Broer* (in Eindhoven) en *Prof. Dr. F. Verhulst* (in Amsterdam) die de twijfel schetst die in de 19e eeuw ontstond met betrekking tot de zekerheid van de voorafgaande eeuw. De centrale figuur is nu Henri Poincaré die in 1889 met een verhandeling over het befaamde drielichamenprobleem, aantoonde dat –in tegenstelling tot de opvatting van Laplace– in een aantal gevallen sprake kan zijn van structurele onvoorspelbaarheid op langere termijn. Hier zou men de intree van het begrip Chaos kunnen plaatsen. Het zou echter duren tot de tweede helft van onze eeuw voordat dit begrip gestalte kreeg.

In de wiskunde is dit geen onbekende situatie. Er zijn vele voorbeelden van begrippen en theorieën die lang tot zeer lang gesluimerd hebben en eerst veel later op hun ware mérites beoordeeld zijn. Dit moge een pleidooi zijn voor een wetenschappelijke bestudering van de geschiedenis van de wiskunde.

Na deze voorbereidingen die het begrip Chaos zijn plaats in de ontwikkelingen hebben gegeven, volgt de mathematische behandeling daarvan.

Allereerst is daar de voordracht van *Dr. I. Hoveijn*, die aan de hand van eenvoudige voorbeelden het begrip bifurcatie, vertakking, introduceert. Dit begrip speelt een rol bij systemen die van één of meer parameters afhangen en vertakkingen kunnen daarbij aanleiding geven tot onvoorspelbaar, zeg chaotisch, gedrag van het systeem. In de voordracht van *Dr. Hoveijn* worden deze begrippen met wiskundige zorgvuldigheid gedefinieerd.

Een belangrijke voorbeeld van bifurcatie en onvoorspelbaar gedrag is het onderwerp van de lezing van *Prof. Dr. J. van de Craats*. Het gaat daarbij om een geschikt gekozen model voor de groei van een populatie –het zogenaamde logistische groeimodel– waarbij een zekere parameter optreedt. Aangetoond wordt hoe de waarde van deze parameter het verloop in de tijd bepaalt en eventueel tot een chaotische ontwikkeling kan leiden.

Aansluitend aan deze lezing is er –zoals gebruikelijk– gelegenheid voor zelfwerkzaamheid en wel onder supervisie van *Prof. Van de Craats*.

De voordracht van *Prof. Dr. J.M. Aarts* legt het verband tussen de chaostheorie en de bekende fractals en leidt aan de hand van exponentiële functies tot verrassende inzichten en boeiende ‘plaatjes’.

De slotvoordracht, die van *Dr. Ir. F.M. Selten* is gewijd aan een verschijnsel dat bij velen wel geldt als het summum van chaos: het weer. Aan de hand van een model dat in 1963 door de beroemde wiskundige en meteoroloog Lorenz is opgesteld en dat één van de pijlers is waarop de chaostheorie steunt, gaat de spreker in op de mogelijkheden en onmogelijkheden van de voorspelling van het weer en daarmee zijn we gekomen aan het slot van een lange weg van Descartes tot heden.

Van harte hoopt de commissie aan wie de voorbereiding van deze vijftigste vakantiecursus werd toevertrouwd, dat de deelnemers daaraan veel genoeg zullen beleven en niet te zeer geschokt zullen zijn wanneer zij beseffen dat de kennis die de wiskunde verschaft, misschien niet zo gewis is als de naam zou

doen vermoeden.

Het is een goede gewoonte om het ‘Ten geleide’ te besluiten met een woord van dank aan alle medewerk(st)ers van het Mathematisch Centrum die zich ingezet hebben om de aankondigingsbrochure en de syllabus op tijd en in fraaie vorm uit te brengen en de verzending van de brochure te verzorgen.

Deze dank geldt daarbij natuurlijk ook degenen die de materiële verzorging tijdens de cursus, zowel in Amsterdam als in Eindhoven, voor hun rekening namen.

Met deze traditie wil ik –zeker in dit jubileumjaar– niet breken, in tegendeel: in mijn inleidende voordracht zal ik daarop nog extra ingaan, maar reeds op deze plaats: ook dit jaar weer hartelijke dank!

Ook de gebruikelijke woorden aan de cursisten worden met een extra klemtoon in de genoemde inleiding uitgesproken.

Moge ook dit jaar weer de cursus zeer geslaagd heten!

A.W. Grootendorst



Inleiding

A.W. Grootendorst

Dames en Heren,

Het is mij een bijzonder voorrecht U bij deze vijftigste vakantiecursus te mogen verwelkomen en daarbij als inleiding een enkel woord te mogen spreken over het ontstaan en de evolutie van dit instituut in de tijd.

Deze cursus ligt U en mij na aan het hart. Velen van U behoren tot de zeer getrouwe bezoekers en als ik U zeg dat ik al vanaf 1965 deel uitmaak van de voorbereidingscommissie, dan zult u begrijpen dat deze cursus ook mij niet onverschillig laat.

Hoewel ik dan vele jaren van nabij de lotgevallen van deze cursus heb meegemaakt, stel ik het toch op prijs dat ik bij de voorbereiding van deze inleiding gebruik kon maken van de desbetreffende gedeelten van de jaarverslagen van het Mathematisch Centrum, die mij zo vriendelijk ter beschikking zijn gesteld door mevrouw A. Baanders.

Helaas wordt in deze verslagen na 1989 geen melding meer gemaakt van deze activiteit van het Centrum, maar misschien is dit jubileum een goede aanleiding deze omissie te herstellen.

De eerste vakantiecursus werd gehouden in Amsterdam onder auspiciën van het Mathematisch Centrum op 29 en 31 oktober 1946 in het toenmalige gebouw 2e Boerhaavestaat 49. De onderwerpen waren ruim geformuleerd: 'De wiskunde en de didactiek van de wiskunde.' Het eerste onderwerp werd uitgewerkt in drie voordrachten: 'De prismoïde'; 'Punten in het oneindige'; 'Abstracte Meetkunde en haar betekenis voor de Schoolmeetkunde' en tot slot 'Ontbinding in factoren'.

De drie voordrachten over didactiek omvatten: 'Is wiskunde voor alpha's noodzakelijk?'; 'Het scheppend vermogen van den wiskundige' en 'Moeilijkheden van leerlingen bij het beginnend onderwijs in de Meetkunde'.

De laatste drie onderwerpen zijn nog actueel.

Van de zeven sprekers van toen is er nog slechts één in leven: Dr. Mr. J. van Yzeren. Het verslag maakt melding van 'een druk bezochte en uitstekend geslaagde vacatiecursus' en het stemt tot dankbaarheid dat welhaast alle volgende cursussen dit predikaat meekregen.

Reeds het volgende jaar kreeg het instituut vakantiecursus een meer formele basis. In samenwerking met de toenmalige lerarenverenigingen 'Liwenagel' en 'Wimecos' werd een permanente commissie van zeven leden benoemd ter voorbereiding van de vakantiecursus 'voor leraren in de wis- en natuurkundige vakken'. Voorzitter was Dr. H.H. Buseman.

Even ter toelichting voor de jongere generatie: 'Wimecos' staat voor Wiskunde, Mechanica, Cosmografie, terwijl 'Liwenagel' een acroniem is voor Leraren Wiskunde en Natuurkunde aan Gymnasia en Lycea.

In deze commissie hadden vertegenwoordigers van het toenmalige MO en VWO zitting, alsook vertegenwoordigers van het Universitaire Onderwijs en een vertegenwoordiger van het Mathematisch Centrum. Deze commissie is met regelmatig wisselende personele bezetting (met nooit meer dan 11 leden) nog steeds in functie. Als voorzitter werd vanaf het begin in de regel een leraar gekozen; reeds vele jaren bij traditie de voorzitter van de Vereniging van Wiskundeleraren.

De rol van het Mathematisch Centrum in dit geheel is vanaf het begin cruciaal geweest: het Centrum verzorgt de gehele administratieve voorbereiding en afhandeling en stelt de ruimte ter beschikking. Later zal ik een aantal belangrijke medewerkers met name noemen.

De sprekers bij de cursussen werden en worden bijna uitsluitend gerekruteerd uit de wetenschappelijke staf van de universiteiten, aanvankelijk bijna zonder uitzondering uit de gevestigde hoogleraren.

Een zeer bijzondere spreker was in 1952 wel Prof. Dr. F.Zernike, de uitvinder van de fasecontrastmicroscop, waarvoor hem in 1953 de Nobelprijs voor de natuurkunde werd toegekend. Tijdens de vakantiecursus sprak hij over trillingen van atomen in moleculen.

In de laatste jaren doet zich een ontwikkeling voor waarbij ook jongere stafleden betrokken worden en dat is voor het kweken van een 'Nachwuchs' zeer gunstig.

Organisatie en karakter van de cursussen hebben in de loop van de jaren een zekere evolutie ondergaan.

Allereerst iets over de duur en de plaats. Vanaf 1946 tot en met 1953 strekte de cursus zich uit over drie dagen. In 1954 was er in verband met het International Congress of Mathematicians (in Amsterdam) geen vakantiecursus. Sindsdien is het steeds een tweedaagse cursus gebleven.

Tot 1963 werd de cursus alleen in Amsterdam gegeven, waar men al spoedig in verband met de grote belangstelling moest uitwijken naar de grote collegezaal van het Geologisch Instituut van de Universiteit van Amsterdam. Vanaf 1980 is de vaste locatie de fraaie collegezaal in het nieuwe gebouw van het M.C. waar we ook nu weer gastvrijheid genieten.

Vanaf 1965 is er –met enkele uitzonderingen– steeds een parallelcursus gegeven in een van de collegezalen van de TU Eindhoven.

Zo'n uitzondering deed zich direct al voor in 1966 toen het in verband met het Internationale Congres in Moskou vrijwel onmogelijk bleek voldoende sprekers aan te trekken. Professor dr. N.G. de Bruijn heeft toen de uitzonderlijke

prestatie geleverd door een volledige tweedaagse cursus Asymptotiek geheel alleen te verzorgen en wel in Amsterdam. U begrijpt dat de commissie niet de vrijmoedigheid had om een beroep op hem te doen voor een parallelcursus in Eindhoven!

Eenmaal was er zelfs een parallelcursus in Zwolle; dat was in 1984 toen het Hewet-programma bij de leraren geïntroduceerd werd met maar liefst 13 lezingen, beluisterd door 261 toehoorders. Ter opfrissing van het geheugen: 'Hewet' staat voor 'Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde Een en Twee'.

Een topjaar in de belangstelling was 1981 met 169 deelnemers in Amsterdam en 126 in Eindhoven. Het onderwerp 'Oriëntatie op Informatica' bleek een schot in de roos.

Een dieptepunt was een cursus (alleen in Amsterdam) met 30 deelnemers. Gelukkig heeft zoiets zich niet herhaald en bleef het aantal deelnemers toch in het algemeen tussen 120 en 150. Toch heeft dit tot ootmoed en nadenken gestemd.

Vanaf het begin is ernaar gestreefd de cursus zo aantrekkelijk mogelijk te maken. Zo zien we al vanaf 1959 een boektentoonstelling, aanvankelijk met medewerking van het Centrum en ook wel van de Universiteit van Utrecht, later ook met medewerking van bekende boekhandels.

Een bijzondere attractie is altijd geweest de gemeenschappelijke lunch en avondmaaltijd in Amsterdam, waar nimmer tevergeefs een extra beroep gedaan werd op het daarbij betrokken personeel.

De laatste jaren is het ook mogelijk gebleken in Eindhoven gemeenschappelijk te lunchen, hetgeen ook hier veel bijdraagt aan de prettige onderlinge contacten.

Van bijzonder groot belang is het feit dat al vanaf 1972 van de volledige cursus een syllabus beschikbaar werd gesteld. Aanvankelijk was deze van bescheiden uitvoering, m.u.v. de syllabus van de jubileumcursus in 1971: 'Een kwart eeuw wiskunde 1946–1971'. Deze verscheen in de fraaie vorm die we van de MC-Syllabi gewend zijn.

Sinds 1983 hebben alle syllabi deze aantrekkelijke gedaante gekregen. Ook is het vermeldenswaardig dat de cursussen sindsdien telkens weer zijn aangekondigd door middel van een aantrekkelijk verzorgde brochure die aan alle VWO-scholen en 'oude bekenden' vooraf wordt toegestuurd.

Sinds vorig jaar geldt de vakantiecursus als erkende nascholingsactiviteit en kunnen de deelnemers desgewenst een certificaat ontvangen.

Het zal duidelijk zijn dat een en ander een bijzondere inspanning vraagt van de staf van het Mathematisch Centrum; ik doelde daar al eerder op.

Op deze plaats past dan ook een woord van dank aan het adres van de medewerkers van het Centrum die zich met zoveel toewijding voor deze zaak hebben ingezet en nog inzetten.

Op het gevaar af mensen over te slaan, noem ik hier uit het heden en het recente verleden: de dames Bruné, Baanders, Foe, Middelberg, Samseer en Verloop en de heren Snijders, Baanders en dr. M. Bakker; als medewerkers uit

het verdere verleden worden genoemd: mevrouw Kuipers-Hoekstra, mevrouw Both, mevrouw drs. Geijssel en de heren drs. Barning en dr. van de Lune.

In de persoon van de heer Thomson wordt dank gebracht aan allen die voor druk en expeditie zorg droegen in heden en verleden.

Tot zover iets over het 'uiterlijk' van de cursus. Ook het karakter hiervan is echter gewijzigd.

Aanvankelijk bestond een cursus uit een aantal lezingen, weliswaar vaak over een centraal onderwerp, maar toch met minder samenhang dan in latere jaren.

Bovendien is er tegenwoordig een duidelijke historische opbouw in die zin dat de wortels van het onderwerp in het verleden in één of meer afzonderlijke lezingen worden blootgelegd.

Een fraai voorbeeld daarvan was de cursus over het zeer actuele onderwerp 'Computer-Algebra' waarbij aangeknoopt kon worden aan een artikel van Liouville van 1843.

In de cursus van 1995 'Kegelsneden en kwadratische vormen' ging men zelfs terug tot Apollonius van Perga (ca. 200 A.D.) en eindigde men met computerdemonstraties.

Dit verschijnsel dateert eigenlijk vanaf de bijzonder geslaagde vakantie-cursus 1989, die geheel gewijd was aan de wiskunde in de Gouden Eeuw.

In deze cursus werd ook –op initiatief van dr. J.A. van Maanen– voor het eerst de zelfwerkzaamheid van de deelnemers ingevoerd in de vorm van een 'oefenuur', waarin vraagstukken worden voorgelegd, die dan onder begeleiding kunnen worden opgelost. Dit element, dat door de deelnemers zeer gewaardeerd wordt, heeft sindsdien een vaste plaats in de cursus verworven.

Zo ontstond een zekere 'formule' voor de vakantiecursus: een modern onderwerp, waarvan allereerst de historische achtergronden belicht worden, vervolgens de ontwikkeling in de tijd en eventuele recente, actuele toepassingen.

Een belangrijk aspect van enkele cursussen is ook het interdisciplinaire karakter. De jubileumcursus van dit jaar is daarvan een fraai voorbeeld.

Daarnaast is er echter ook aandacht voor de dagelijkse praktijk in de klas: wat kunnen we ervan, eventueel in 'gefilterde vorm', doorgeven aan de leerlingen?

Hiermee raken we een wel zeer essentieel punt. Er wordt de laatste tijd veel geklaagd over het gebrek aan belangstelling voor de wiskunde onder toekomstige studenten. Slechts weinigen kiezen wiskunde als studievak.

Naar mijn mening zou dit voor een groot deel veroorzaakt kunnen worden doordat de wiskunde voor de goede leerlingen niet voldoende interessant gemaakt wordt.

Begrijp mij goed: ik pleit niet voor 'flauwe', gepopulariseerde wiskunde, waarbij triviale toepassingen de indruk wekken dat het in de wiskunde daarom gaat. Wiskunde moet interessant zijn doordat er een intellectuele uitdaging van uitgaat.

Hier nu ligt een uitermate belangrijke taak waaraan wij gezamenlijk een

bijdrage moeten en kunnen leveren. U als docenten en wij als voorbereidingscommissie.

Natuurlijk weet ik dat hier gebrek is aan tijd. Gebrek aan ruimte in het lesrooster, maar ook gebrek aan ruimte in de agenda van de leraar, die opgezadeld wordt met officiële stukken, vergaderingen en nooit aflatende wijzigingen in het beleid, die even zovele beknotten van de doceervrijheid betekenen. De ruimte voor iets extra's is dus vrijwel nihil.

Toch blijft er de noodzaak de begaafde leerlingen te wijzen op de boeiende schoonheid van de wiskunde.

Daartoe kan en wil de vakantiecursus een hulpmiddel zijn. De docenten kunnen daardoor op ongedwongen wijze in contact gebracht worden met nieuwe (of oudere) interessante onderwerpen en literatuur daarover.

Wij hopen dat dit voor de leraar een stimulans zal zijn om zich daarmee ook gedurende het cursusjaar bezig te houden en –zoals gezegd– iets van zijn enthousiasme daarvoor te delen met zijn leerlingen. Alleen op die manier kan de fakkel worden doorgegeven.

Hoe vaak kwam het in het verleden niet voor dat de eindexamenkandidaten een vak gingen studeren omdat zij daartoe geïnspireerd waren door het enthousiasme van een leraar, wiens enthousiasme zich weerspiegelde in zijn lesgeven!

Mij is het in ieder geval zo vergaan en dat geldt voor mij persoonlijk niet alleen voor de wiskunde, maar ook voor een aantal literaire vakken, die mij nog dagelijks boeien.

Zo krijgt de aloude wijsheid 'Non scholae sed vitae discimus' (Wij leren niet voor de school, maar voor het leven) zijn diepere zin als wij onder 'vitae' ook het persoonlijke leven verstaan.

Wat de leerlingen betreft: lange ervaring heeft mij geleerd dat deze altijd ontvankelijk zijn voor echte kwaliteit. Aan hun inzet hoeft men niet te twifelen en ik onderschrijf dan ook volgaarne wat de grote cultuurhistoricus Johan Huizinga schrijft aan het slot van zijn boeiende boek 'In de schaduwen van morgen', waar hij als zijn overtuiging uitspreekt dat de jongere generaties in geschiktheid voor het leven niet achter staat bij voorgaande generaties en deze als volgt karakteriseert:

'Zij schijnt open, ruim, spontaan, vaardig tot genieten, maar ook tot ontberen, snel beraden, moedig en van grote zin. Zij is lichter geschoeid dan de vroegere waren. Aan dit jonge geslacht de taak deze wereld opnieuw te beheersen, zoals zij beheerst wil zijn, haar niet te laten ondergaan in haar overmoed en verdwazing, haar weer te doordringen met geest'.

Aan de vorming van deze generatie mee te werken is een voorrecht. Het leraarsambt is een 'officium nobile', een nobel ambt.

Het bijdragen aan de vorming van docenten eveneens. Tijdens de vacatiecursus hebben wij altijd het gevoel onder de ware liefhebbers te verkeren, de amateurs in de meest letterlijke zin.

In mijn studeerkamer heb ik een uitgave van het Wiskundig Genootschap uit 1866 'Wiskunstige Opgaven met hare Ontbindingen', echt een werk voor amateurs en het is boeiend de bijgevoegde ledenlijst te lezen.

Men vindt daarin naast vele leraren en onderwijzers ook leden van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen, ingenieurs, kostschoolhouders, kantonrechters, artsen, belastingambtenaren, militairen, ja zelfs politici!

Zo gemêleerd is ons gezelschap nu ook weer niet, maar de liefde voor het vak is gemeenschappelijk. De werkomstandigheden zijn echter veel zwaarder.

Des te meer waarderen wij het dat U een deel van Uw vrije tijd besteedt om hierheen te komen en –zoals dat formel heet– ‘door Uw aanwezigheid van Uw belangstelling blijk geeft’.

Dit waarderen wij ten zeerste en dit prikkelt ons ook om steeds weer ons in te spannen voor een goed programma.

Laten wij hopen dat wij elkaar ook in de toekomst nog vele malen mogen ontmoeten bij deze nuttige en vooral ook aangename bijeenkomsten, waaraan wij over en weer zoveel genoegen beleven.

A.W.Grootendorst

APPENDIX. VAKANTIECURSUSSEN SINDS 1946

1946	Wiskunde / Didactiek van de wiskunde
1947	Topologie
1948	Cursus had betrekking op: grondslagen - problemen (i.s.m. Nederlandse Vereniging voor Logica)
1949	De Groepentheorie
1950	De waarschijnlijkheidsrekening, haar grondslagen en haar toepassingen
1951	De wiskunde in haar onderscheidene toepassingen
1952	De mechanica
1953	Diverse onderwerpen, die tezamen een groot gebied van de zuivere en toegepaste wiskunde besloegen
1954	Geen vakantiecursus i.v.m. Internationaal Mathematisch Congres
1955	Op verzoek van vereniging "WIMECOS" gewijd aan -het ontwerp- leerplan voor wiskunde 1954 bij het M.O.
1956	De wetenschappelijke grondslagen der Elementaire Wiskunde
1957	Historische en methodische aspecten van de Meetkunde
1958	De Algebra met haar Historische en Methodische aspecten
1959	De Vectoren
1960	Het wiskunde-onderwijs in het V.H.M.O. van morgen
1961	De moderne Algebra
1962	Rondom de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs bij het VHMO
1963	Topologie
1964	Toegepaste analyse
1965	Getallentheorie
1966	Zadelpuntsmethoden
1967	Besliskunde
1968	De geschiedenis van de Wiskunde tot omstreeks 1900
1969	Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek
1970	Computer en Onderwijs
1971	De ontwikkeling van de Wiskunde in de afgelopen 25 jaar
1972	Grafentheorie en haar toepassingen
1973	Abstracte informatica
1974	Algebraïsche vergelijkingen
1975	Discrete Wiskunde
1976	Functionaalanalyse
1977	Mathematische Logica (algorithmen en hun beperkingen)
1978	Meetkunde, van kunst tot kunde, vroeger en nu
1979	Nieuwe toepassingsgebieden van de wiskunde (econometrie, sociale wetenschappen, biomathematica en linguïstiek)
1980	Vertellingen over tellingen
1981	Oriëntatie op informatica
1982	Wiskunde in het vrije veld; Golfverschijnselen Cryptografie
1983	Complexe getallen
1984	Hewet-plus wiskunde
1985	Variatierekening
1986	Matrices
1987	De personal computer en de Wiskunde op school
1988	Differentie- en differentiaalvergelijkingen
1989	Wiskunde in de Gouden Eeuw
1990	Getaltheorie
1991	Meetkundige Structuren
1992	Systeemtheorie
1993	Het reële getal
1994	Computer-Algebra
1995	Kegelsneden en kwadratische vormen
1996	Chaos



De Werveltheorie van Descartes

J.A. van Ruler

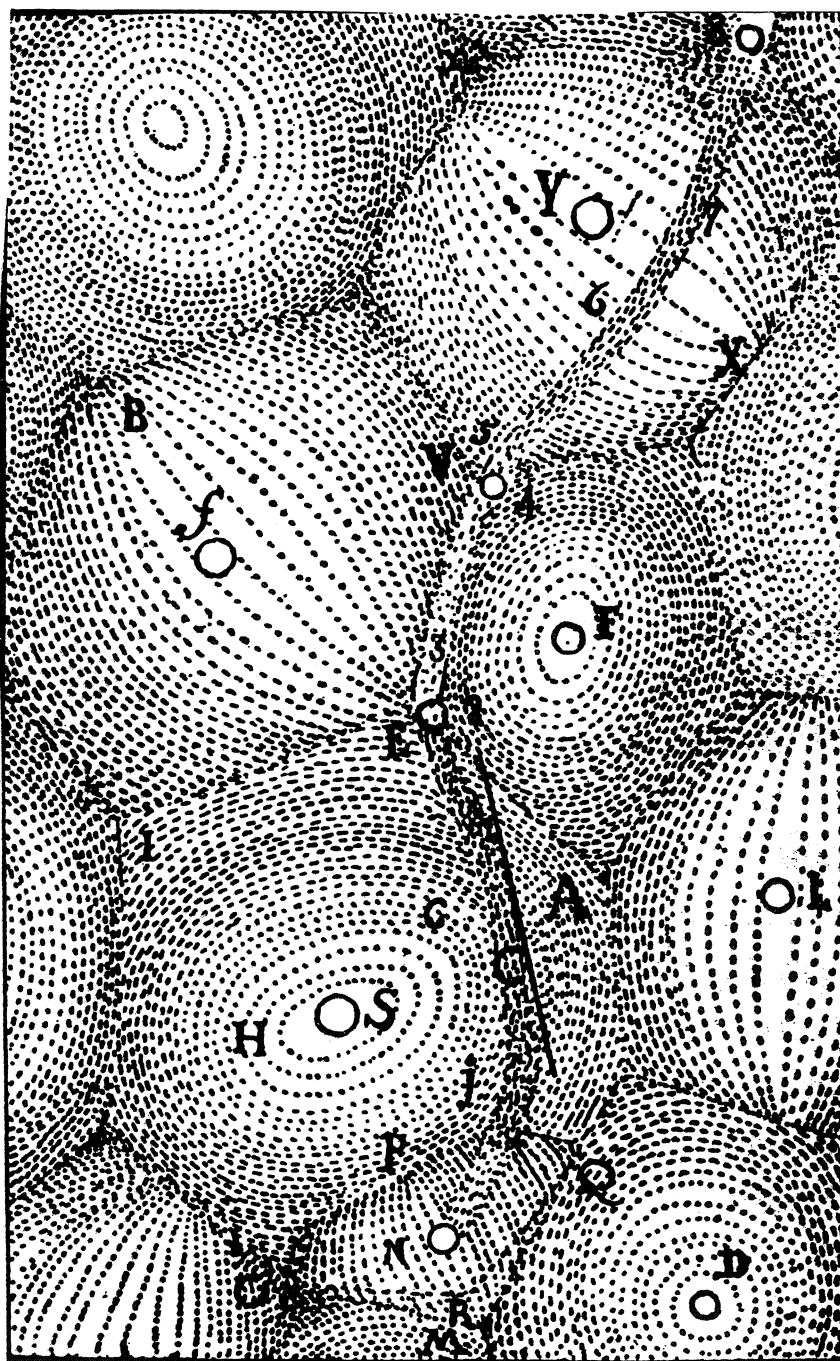
René Descartes werd precies 400 jaar geleden geboren in de vroegere Franse provincie Touraine. Een groot gedeelte van zijn leven bracht hij door in Nederland, waar hij zijn beroemde werken schreef. Hij trok van stad naar stad en leefde onder andere in Franeker, Amsterdam, Deventer, Utrecht en Leiden. Eind 1649 ging hij op uitnodiging van koningin Christina naar Zweden. Zijn verblijf in Stockholm werd hem echter noodlottig. Tegen zijn gewoonte in moest Descartes vroeg opstaan: om half vijf 's ochtends stond de koets klaar om hem naar het paleis te brengen voor het onderwijs aan de koningin. Descartes liep al gauw een longontsteking op en stierf op 11 februari 1650.

René Descartes was een groot wiskundige, maar hij staat ook bekend als grondlegger van de moderne filosofie. Zijn stelling 'Ik denk, dus ik ben', die het uitgangspunt vormt van zijn metafysische beschouwingen, is spreekwoordelijk geworden. Minder bekend is het feit dat Descartes' filosofische overpeinzingen nauw verband houden met het natuurwetenschappelijke project dat hij beschouwde als zijn levenswerk.

Descartes' natuurfilosofie staat nog veraf van onze tegenwoordige natuurkunde, al is het maar omdat wiskundige berekeningen er vrijwel in ontbreken. Toch is de fysica van Descartes van grote invloed geweest op onze kijk op de natuur. Om natuurlijke processen te kunnen verklaren, ontwierp Descartes met een verbeeldingskracht die ook de huidige lezer nog kan bekoren een deterministisch model van de stoffelijke natuur.

Centraal in zijn systeem staat het idee van de *vortex*, 'draaikolk' of 'wervelstroom': een continue stroom van onzichtbaar kleine materiedeeltjes. Descartes zag het universum als een vloeistofachtig geheel. Kolkende materie-massa's bepalen de vorm van het heelal. Sterrenstelsels bestaan volgens Descartes bijvoorbeeld uit een centraal verzamelpunt van zeer beweeglijke en zeer fijne materie waaruit de zon en de overige sterren zijn opgebouwd, met daaromheen ronddraaiende wervels van middelgrote materiedeeltjes. In zulke ronddraaiende wervels worden grovere brokstukken materie—zoals de planeten—om de zon gevoerd.

De Cartesiaanse theorie gaat dus niet uit van de bindende factor van de gravitatiekracht, maar van het idee dat planeten worden voortgestuwd door de fijne materie waarin ze als het ware ronddobberen. Deze theorie komt op de



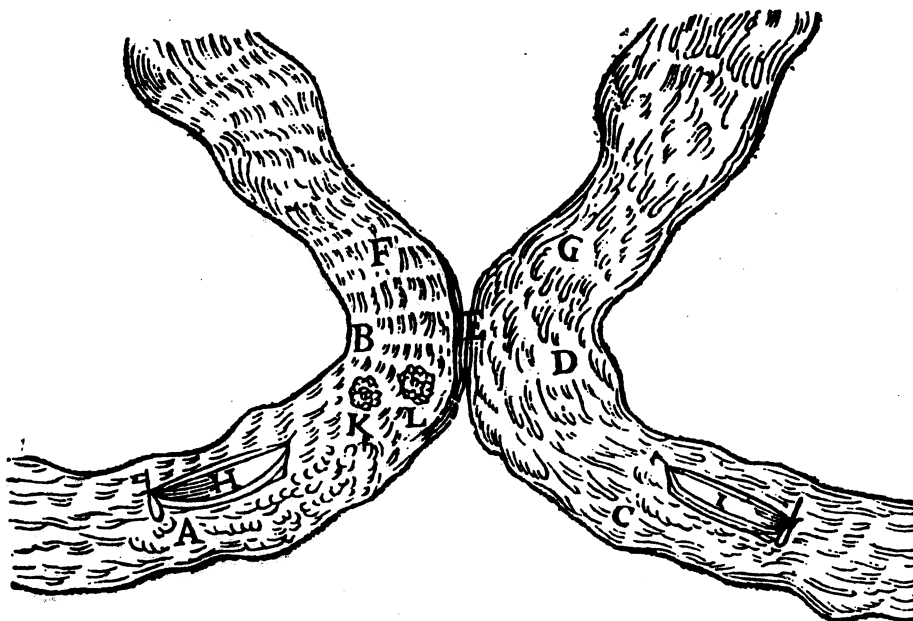
FIGUUR 1. Cartesiaanse sterrenstelsels

huidige lezer misschien wat naïef over. Maar met dit eenvoudige model wist Descartes een enorm aantal zeer uiteenlopende fenomenen in één systeem onder te brengen. Hij gaat daarbij zo te werk dat hij steeds analogie-redeneringen maakt vanuit de dagelijkse belevingswereld. Neem het voorbeeld van kometen. Kometen draaien niet rond een centraal gelegen ster. Hun gedrag is dus zeer uitzonderlijk. Descartes zat er een beetje mee in zijn maag, maar toen hij eenmaal alle relevante gegevens had verzameld, formuleerde hij zijn wereldsysteem als volgt. Wervels van ‘hemelse lucht’ (het ‘tweede element’) draaien onafhankelijk van elkaar om centra van het eerste, ‘vurige’ element, dat bestaat uit de samengebalde deeltjes die zijn overgebleven nadat alle ruimte tussen de luchtdeeltjes was opgevuld. De theorie verklaart dus de vaste positie van de sterren als clusters vurige deeltjes. De beweging van brokstukken van het derde (‘aarde’-achtige) element, zoals planeten en kometen, wordt verklaard door de beweging van de wervel. Planeten worden eenvoudigweg rondgevoerd. Maar ook voor kometenbanen, die zich min of meer rechtlijnig bewegen, biedt de theorie een verklaring. Descartes vergelijkt de situatie met die van een stroompje, dat op een gegeven punt met een ander stroompje samenkomt, om daarna weer uit elkaar te gaan.

Grotere objecten, zoals een flink stuk hout of een boot, kunnen in zo’n geval van de ene stroom in de andere belanden en erdoor worden meegesleurd. Kleinere objecten, zoals blaadjes, takjes, strootjes, of het schuim op de golven, blijven daarentegen juist aan de binnenkant van de stroom hun weg vervolgen. Evenzo zullen kometen doorstoten van de ene in de andere wervelstroom, terwijl de ‘minder massieve’ planeten een vaste baan in een bepaalde wervelwind innemen op precies die stabiele plek waar ze een even grote centrifugale neiging hebben als de omringende lucht. Die ‘kracht’ om in een rechtlijnige beweging door te gaan is per planeet verschillend en hangt af van de dichtheid van de planeet. In samenhang hiermee verschillen ook de afstanden van de planeten tot het centrum van de wervelstroom.

Het feit dat Descartes’ verklaring van de beweging van hemellichamen aansluit bij zulke alledaagse observaties als het gedrag van drijvende objecten in een beek, is op zich al opmerkelijk te noemen. Van de eeuwige en onveranderlijke beweging van de hemellichamen had men altijd gedacht dat ze van een andere orde moest zijn dan de bewegingen op aarde, die door grilligheid en veranderlijkheid worden gekenmerkt. Descartes’ beeld van de hemelse wervelwinden sluit echter bewust aan bij het beeld van natuurlijke processen om ons heen. Aardse en hemelse processen dienen op eenzelfde manier te worden verklaard in termen van materie in beweging.

De waarneming van het gedrag van lichamen in vloeistoffen vormen voor Descartes een dankbare bron ter verklaring van het gedrag van hemellichamen. In *De Wereld*, het boek waarin Descartes zijn wereldsysteem voor het eerst ontvouwde (maar dat hij in verband met de veroordeling van Galileo door de rooms-katholieke kerk niet publiceerde), trekt Descartes de vergelijking door: net als de snelheid van boten die worden meegevoerd in een stroom achterblijft bij de snelheid van het water, zal ook de hemelse materie rond een planeet

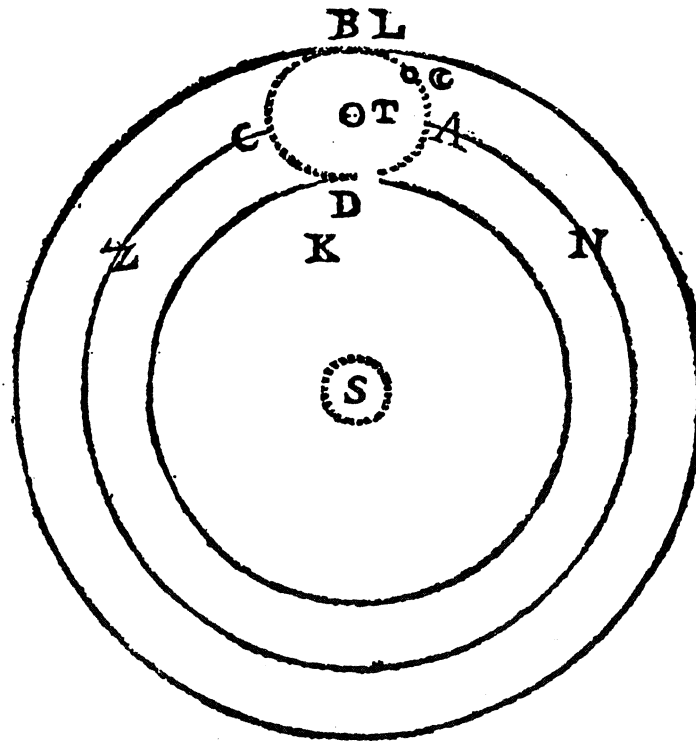


FIGUUR 2. Massieve en minder massieve objecten in een stroom. Takjes en schuim klonteren en vervolgen hun weg in de richting van F. Boot H kan doorstoten in de richting van G en zelfs de kleinere boot I verbrijzelen.

sneller rond de zon bewegen dan de planeet zelf. Het gevolg is, dat een gedeelte van de wervelstroom wordt afgebogen, omdat de planeet als het ware in de weg zit. Deze materie vormt vervolgens een eigen draaikolk om de planeet heen, die ervoor zorgt dat zo'n planeet om haar eigen as omwentelt.

Stel nu dat er zich in zo'n systeem een groot object in ongeveer dezelfde baan als de planeet rondom de zon bevindt. Als dat object kleiner is dan de planeet, zal het sneller dan die planeet worden rondgevoerd. Zo'n object zal, net zoals de deeltjes van de wervelstroom, de planeet inhalen, met als gevolg dat ook dit kleinere object in de kleine wervelstroom terecht komt, waardoor de planeet omgeven wordt. Het lichaam wordt vervolgens in de kleine wervelstroom meegevoerd en draait als een satelliet in een baan om de planeet: precies hetgeen gebeurd is in het geval van de aarde en de maan!

Ook wat er zich op aarde afspeelt, houdt verband met het zo ontstane aarde-maan systeem. In de eerste plaats geldt dit de zwaarte die wij ondervinden van aardse lichamen. Zoals gezegd, bevindt zich in de directe omgeving van de aarde een kleine wervelstroom van fijne materie. Ook deze 'kleine hemel' heeft



FIGUUR 3. De aarde, T, beweegt zich van N naar Z. De maan haalt haar in en wordt afgebogen in de richting van B.

een grotere snelheid dan de aarde zelf en daarmee ook een grotere centrifugale neiging dan alles wat aan aardse materie vanaf het aardoppervlak in de kleine hemel terecht komt. Als een aards object boven de grond wordt losgelaten, zal het daarom door de fijne 'celeste' materie naar beneden worden gedrukt.

De zwaartekracht is daarmee mechanistisch verklaard. Maar Descartes zou er nooit op die manier over spreken. In zijn *Dicours de la Méthode* (Leiden, 1637), zegt hij uitdrukkelijk dat hij het gedrag van objecten op aarde kan verklaren, zonder van de veronderstelling uit te gaan dat God enige zwaarte of zwaartekracht (*pesanteur*) aan de materie heeft toegevoegd. Wat hij bedoelt is dat 'zwaarte' niet aan de objecten zelf toekomt, geen inherente eigenschap van lichamelijke objecten is. De zwaarte moet worden verklaard door de fysische inwerking van verschillende deeltjes op elkaar. In Descartes' tijd was het gebruikelijk om voor de verklaring van de zwaarte een occulte kracht of een doelmatigheid van de natuur te veronderstellen. Volgens Descartes horen dergelijke overwegingen echter niet in de fysica thuis. Ook zwaarte is een gevolg van de werking van de wervelstroom.

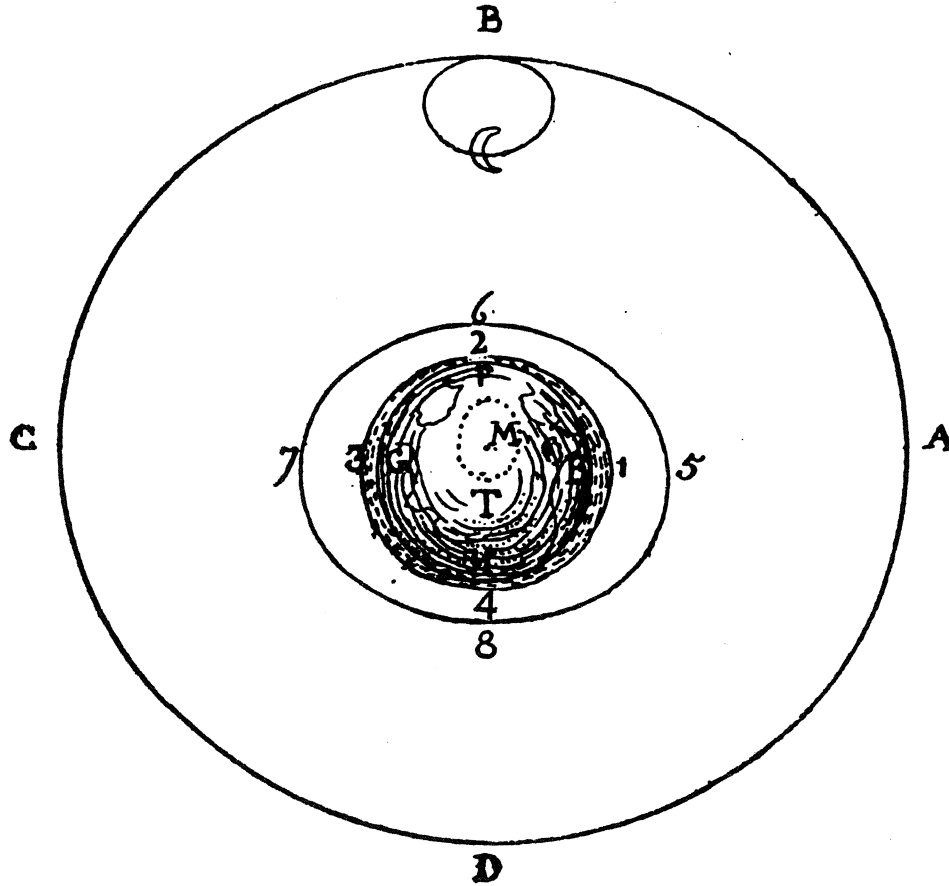
Zo ontwierp Descartes wervel na wervel. Het aarde-maan systeem ver-

klarde ook het fenomeen van eb en vloed. Tijdgenoten zochten de oorzaak in een occulte kracht die op één of andere wijze met de maan samenhang. Volgens Galileo hadden eb en vloed niets met een occulte kracht van de maan te maken. Hij zag de getijdenbeweging als het enige verschijnsel op aarde waaraan je kon zien dat de aarde bewoog. In tegenstelling tot Galileo, wilde Descartes de maan wel in de getijdenbeweging betrekken. Maar evenmin als in het geval van de zwaarte was Descartes bereid een occulte kracht te veronderstellen, die aan de maan zelf zou toekomen. Alweer bewees het vloeistofmodel van de draaikolk zijn dienst.

Grofweg waren er de volgende verschijnselen te verklaren: om de ca. 6,2 uur treedt er een maximumstand op van de waterspiegel. Bij volle maan of nieuwe maan en aan het begin van lente en herfst is er sprake van een extra groot effect. Descartes bracht deze fenomenen mechanistisch in kaart door te veronderstellen dat de maan, die zich in de kleine wervelstroom rond de aarde bevindt, de aarde enigszins uit het middelpunt van haar draaikolk duwt. Diezelfde draaikolk wordt daardoor op twee diametraal tegenover elkaar gelegen plaatsen samengedrukt: tussen de aarde en de maan (6,2) en in dat gedeelte van de 'kleine hemel' in de richting waarvan de aarde wordt weggeduwd (4,8). Aangezien er in het systeem ABCD een continue stroom is van hemelse materie, zal er op de twee samengeperste plaatsen een grotere druk ontstaan, die de wateren in onze havens en aan onze stranden bij 2 en 4 doet rijzen. Na zes uur is de aarde een kwartslag gedraaid, zodat ook de vloedbeweging zich over het aardoppervlak verschuift. Maar ook de maan beweegt zich ten opzichte van de aarde en wel in dezelfde richting als waarin de aarde wentelt om haar as. Aangezien de maan eens per maand een baan om de aarde maakt, zal dit de getijdenbeweging elke dag met $1/30$ doen vertragen. Na zes uur is deze vertraging $1/120$ omwenteling, wat neerkomt op een vertraging van de vloedverplaatsing van 3° . Pas na 6 uur en ca. 12 minuten zal er daarom vloed optreden bij 1: precies wat er in werkelijkheid gebeurt! Ook de verklaring van springtij bij volle en nieuwe maan behield voor Descartes niets mysterieus. Hij voerde er de extra hypothese voor in dat de draaikolk rond de aarde geen volmaakte bol vormt. Omdat de lijn BD korter is dan de lijn DA, is het effect twee keer per maand (bij volle en nieuwe maan, met de maan in B of in D) het grootst en twee keer, in het eerste en laatste kwartier, het minst.

Aangezien de maan zich tenslotte altijd in de buurt van de ecliptica bevindt (d.w.z. in de buurt van de baan die de zon aan de hemel doorloopt), en de ecliptica zich aan het begin van lente en herfst het dichtst bij het equatoriaal vlak bevindt, is ook dan het effect van de vloedbeweging groter. Descartes legt nergens uit waarom, maar wellicht hield hij het erop dat de kruising met de baan van de zon een extra vernauwing van de diverse draaikolken met zich meebrengt.

Met een eenvoudig model van druk en stoot trachtte Descartes inzichtelijk maken wat wat voorheen alleen door een beroep op *occulte oorzaken* 'verklaard' werd. De deeltjestheorie van Descartes was weinig nauwkeurig en zijn wervelwinden lijken soms volkomen uit de lucht gegrepen. Maar de kracht die van



FIGUUR 4. De getijdenbeweging volgens Descartes, *Principia Philosophiæ* Amsterdam 1644.

de deeltjesfilosofie uitging, kan nauwelijks worden onderschat. Met de vortex-hypothese kon een indrukkend aantal fenomeen worden verklaard. Over het verschijnsel zwaarte en over de getijdenbeweging werd in Descartes' tijd ook door anderen nagedacht. Velen zochten een identieke verklaring voor deze verschijnselen en brachten ze in verband met het verschijnsel magnetisme. Het sterke punt van Descartes was dat hij met zijn vortextheorie precies deze fenomenen en daarnaast nog een hele reeks andere verschijnselen onder één noemer bracht.

In zijn hoofdwerk, de *Principia Philosophiæ* van 1644, vatte Descartes zijn natuurfilosofie samen. Sinds de tijd dat hij aan *De Wereld* gewerkt had, was er hier en daar wel het één en ander bijgesteld in het Cartesiaanse universum. In de *Principia* is de rivier-vergelijking voor de verklaring van de baan van

een planeet en die van een komeet verdwenen. Descartes benadrukt slechts het verschil in 'dichtheid' (*soliditas*) tussen kometen en planeten. Bij de komeet zal, wanneer deze in een wervelstroom terechtkomt, de rechtlijnige beweging sterker zijn dan de beweging naar het centrum van de vortex. De minder dichte planeet zal echter verder naar het centrum van een wervelstroom worden geduwd en uiteindelijk in een stabiele positie terecht komen. Bij de verklaring van de zwaarte van aardse lichamen komt de nadruk te liggen op het verschil in opwaartse kracht tussen celeste materie van de eerste en tweede soort en aardse materie, die gewoonlijk uit alle soorten is samengesteld. Ook het aarde-maan systeem is bijgesteld: de verklaring voor de baan van de maan luidt nu, dat deze de aarde inhaalt en zo een afzonderlijke draaikolk *tot stand brengt*.

Het model van wervelwinden werd dus al door Descartes zelf kritisch tegen het licht gehouden. Uiteindelijk zou er echter geen interpretatie van het model overblijven die van alle inconsistenties gezuiverd was of op een meer exacte wijze met de verschijnselen overeen gebracht kon worden. Interne inconsistenties en onduidelijkheden zouden het model parten blijven spelen. Bovendien kwam er in de vorm van Newton's gravitatietheorie al gauw een alternatief.

Descartes' natuurkunde bleek uiteindelijk onhoudbaar. Maar toch blijft zijn werk van grote wetenschapshistorische betekenis. Velen, waaronder Newton zelf, zagen het mechanistische model als het uiteindelijke doel van wetenschappelijke verklaring. Door fysische en chemische processen terug te brengen (te 'reduceren') tot een model van elementaire materiedeeltjes, hoopte men een ongrijpbaar verschijnsel als de zwaartekracht uiteindelijk toch inzichtelijk te maken. Die aanpak bleef niet beperkt tot de tijdgenoten van Descartes: nog steeds is de behoefte aan oorzakelijke verklaringen pas bevredigd wanneer een proces is gereduceerd tot het niveau van de meest elementaire deeltjes. Vandaag de dag worden die verklaringen niet meer gezocht in het eenvoudige Cartesiaanse model van druk en stoot, maar toch luidde Descartes met zijn vortextheorie een nieuw tijdperk in van wetenschappelijke verklaring. Het deeltjesmodel kwam centraal te staan.

Daarnaast is er nog een tweede aspect aan de vortextheorie dat van invloed is gebleven ondanks de vroege dood van Descartes' specifieke natuurkundige theorieën. In de *Principia* verklaart Descartes dat men zijn model slechts moet opvatten 'als een hypothese'. Hij zegt dit niet omdat hij niet van de letterlijke waarheid van zijn model overtuigd zou zijn. De nadruk op het hypothetische karakter van zijn systeem heeft te maken met het feit dat Descartes met zijn draaikolken ook een *ontstaansgeschiedenis* geeft van het universum. De positie van planeten wordt verklaard door te veronderstellen dat ze, op het moment dat ze ooit een draaikolk van buitenaf binnentraden, niet op dezelfde manier zijn afgebogen als kometen. De positie van de maan wordt verklaard door het veronderstelde feit dat ze de aarde ooit heeft ingehaald, vervolgens is afgebogen en zo een draaikolk heeft gevormd. Steeds hangt de verborgen werking van het systeem samen met de verklaring van het *ontstaan* van het systeem. De oorzakelijke verklaring van natuurwetenschappelijke processen leidt als het ware vanzelf tot een uitleg van eerdere fases in de ontstaansgeschiedenis van die pro-

cessen. Ook deze tweede vorm van mechanistische 'reductie' is van blijvende invloed geweest op de vorming van natuurwetenschappelijke verklaringsmodellen. Een uiteindelijke verklaring neemt niet alleen de meest elementaire deeltjes in ogenschouw, maar voert het proces ook terug tot het beginstadium.

In verband met het ontstaan van aarde, maan en sterren is het niet verwonderlijk dat Descartes zijn model presenteert 'als hypothese'. Het mechanistische wereldbeeld liet naar de smaak van veel tijdgenoten te weinig ruimte over voor de Hand van de Schepper in het heelal. Descartes verdedigde zich door zijn model als een gedachtenexperiment te zien: 'Ik vroeg me af wat er zou gebeuren als God thans, ergens in een denkbeeldige ruimte, genoeg materie zou scheppen om een wereld te maken, en willekeurig, zonder enig plan, de verschillende delen van deze materie zou bewegen zodat er een chaos zou ontstaan, zo volledig als alleen dichters kunnen bedenken.' De orde die Descartes vervolgens in die chaos schiep, liet God er geheel en al buiten. In plaats van een theologische, zou het na Descartes een natuurkundige opdracht worden om te zoeken naar een laatste grond.

De Newtoniaanse Kosmos

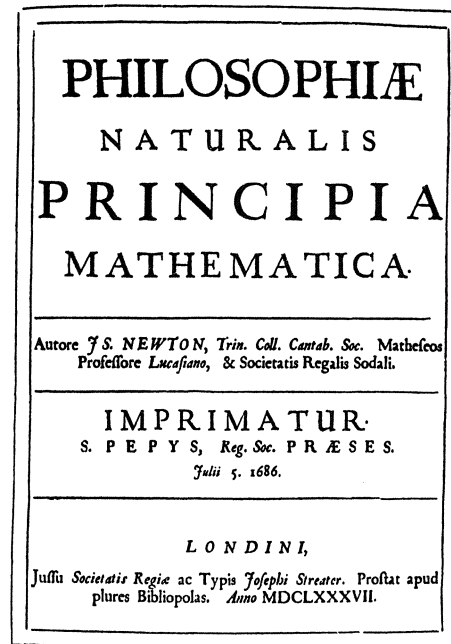
C. de Pater

In augustus 1684, een paar maanden voor de verschijning van Leibniz' beroemde artikel over de differentiaal- en integraalrekening, reist de astronoom Edmund Halley van Londen naar Cambridge. Hij maakt van de gelegenheid gebruik om een bezoek te brengen aan Isaac Newton, die toen reeds faam genoot als wiskundige en natuuronderzoeker. Hij zit namelijk met een probleem: wat is de baan van een planeet, als je uitgaat van de veronderstelling dat de zon er een aantrekkende kracht op uitoefent, die omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand tussen beide hemellichamen? Verschillende leden van de Royal Society hadden al een aantal jaren over deze vraag nagedacht. Tot hen behoorden Christopher Wren, Robert Hooke en Halley zelf. Nog in januari 1684 had het drietal tijdens een vergadering van de Royal Society zich ermee beziggehouden. De grote achterliggende kwestie was: hoe kun je de drie Keplerwetten (figuur 3) uit dynamische beginselen afleiden? Dat je van een omgekeerde-kwadraatwet moest uitgaan, leek langzamerhand evident, maar hoe hieruit de wetten van Kepler volgden, bleef een raadsel. Weliswaar beweerde Hooke dat hij het probleem had opgelost, maar die claim kon hij niet hard maken.

Geen wonder dus dat Halley aangenaam verrast is, als Newton hem zonder enige aarzeling meedeelt dat de baan van de planeet een ellips is en natuurlijk wil hij graag het bewijs zien. Helaas kan Newton zijn aantekeningen niet meer vinden -dat zegt hij tenminste- maar hij belooft hem zich opnieuw in de materie te verdiepen en hem de resultaten toe te sturen.

DE PRINCIPIA

Het bezoek van Halley had een diepgaande invloed op Newtons leven. In korte tijd wist hij zijn zogenaamd zoekgeraakte aantekeningen om te werken tot een korte verhandeling, waarvan Halley meteen begreep dat het de belofte inhield van een revolutie in de hemelmechanica. Newton raakte intussen volledig in de ban van zijn onderwerp. Het stuk dat hij Halley gestuurd had, groeide onder zijn handen uit tot misschien wel het meest invloedrijke natuurwetenschappelijke werk dat ooit verschenen is, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, meestal kortweg de Principia genoemd (figuur 1). Het boek verscheen in 1687 mede dankzij de actieve bemoeienis van Halley, die de schrijver niet alleen tot publicatie aanzette, maar ook de drukkosten betaalde, omdat Newton zelf hiertoe niet in staat was, evenmin trouwens als de Royal Society.



FIGUUR 1. Isaac Newton (1642-1727) en titelblad 'Principia'

Het werk is qua vorm en inhoud geschreven in euclidische trant. Dat lijkt vreemd voor iemand die zelf een belangrijk aandeel had in de ontwikkeling van de differentiaal- en integraalrekening. Maar ondanks de successen die met de nieuwe wiskundige aanpak behaald werden, gaf Newton er toch de voorkeur aan de uiteindelijke oplossing van mathematische vraagstukken te geven met behulp van de euclidische meetkunde, waar nodig aangevuld met wat we nu zouden noemen limieten van rijen krimpnde lijnstukken of verhoudingen van lijnstukken, terwijl hier en daar een algebraïsche berekening voorkomt met behulp van reeksen. Hij geeft allereerst een aantal definities, onder andere van diverse soorten krachten en van het massabegrip. Vervolgens formuleert hij een drietal bewegingswetten, die als axioma's (figuur 2) dienen, waarop alle redeneringen uiteindelijk gebaseerd zijn, zij het dat er voor boek III nog wat redeneerregels nodig waren. De Principia is namelijk in een drietal 'boeken' verdeeld, waarvan de eerste twee de wiskundige grondslagen van Newtons bewegingsleer bevatten, die in boek III worden toegepast op het wereldsysteem, dat wil zeggen, op de bewegingen in het zonnestelsel.

Newton begint dus niet direct aan een behandeling van de waargenomen (hemel)verschijnselen. Eerst construeert hij in boek I zijn eigen wereld. Dat is een oneindige, driedimensionale euclidische ruimte, waarin mathematische punten en lichamen bewegen volgens de eerder vastgelegde drie bewegingsaxioma's. Een van de kernvragen die Newton zich stelt, is hoe in deze wereld van eigen

1. *Ieder lichaam volhardt in zijn toestand van rust of eenparige rechte lijnige beweging, behalve voor zover het door de werking van krachten gedwongen wordt die toestand te wijzigen. [traagheidswet]*
2. *De verandering van de beweging [= hoeveelheid beweging of impuls] is evenredig met de werkende bewegende kracht en heeft plaats langs de rechte lijn volgens welke die kracht werkt. [Sinds Euler wordt dit de wet $F = ma$.]*
3. *Tegenover elke actie staat altijd een gelijke reactie; ofwel, de wederzijdse werkingen van twee lichamen op elkaar zijn altijd gelijk en tegengesteld gericht.*

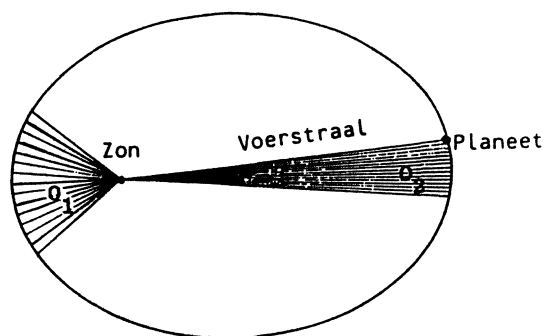
FIGUUR 2. Newtons drie bewegingswetten

makelij bewegingen verlopen onder invloed van centrale (centripetale) krachten. Deze vraag stelt hij niet zo maar. Van meet af aan heeft Newton namelijk doelbewust in zijn geconstrueerde wereld een aantal bewegingsproblemen onderzocht, waarvan hij de oplossingen in de vorm van bewegingswetten later in boek III kan overhevelen naar de wereld van de verschijnselen, met name de hemelbewegingen.

Newtons aanpak convergeert als het ware naar de verschijnselen toe. Als hij in zijn abstracte wereld een mathematische grootheid invoert die hij centrale kracht noemt, dan heeft dat te maken met zijn overtuiging dat er in de wereld van de verschijnselen zulke krachten bestaan. Eerst behandelt hij het probleem van een puntmassa die beweegt onder invloed van een centrale kracht. Hiervoor blijkt de perkenwet te gelden, die Kepler empirisch had vastgesteld voor de beweging van de planeten om de zon (figuur 3). Voor het geval de baan van de puntmassa een ellips is met het krachtcentrum in één van de brandpunten, leidde Newton af dat de centrale kracht omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand tussen krachtcentrum en bewegend punt. Dit mathematisch systeem van puntmassa en krachtcentrum wordt vervolgens verfijnd tot een systeem van twee bewegende puntmassa's. Dat gebeurt met het oog op de wisselwerking tussen de zon en een planeet. Verder vindt de overgang plaats van puntmassa's naar eindige lichamen, waarbij Newton aantoont dat men zich de massa van een lichaam geconcentreerd mag denken in het zwaartepunt. Dit proces van systeemverfijning leidt tenslotte tot een wiskundig bouwsel dat vergaand is bijgesteld in de richting van de wereld van de verschijnselen, maar dat toch nog altijd wezenlijk mathematisch van aard is.

GRAVITATIE

In het derde boek van de Principia wordt een aantal van de afgeleide beginselen gebruikt voor de verklaring van de bewegingen in het zonnestelsel. Dat roept overigens wel een paar vragen op. Om te beginnen: Newtons mathematische constructies van boek I behandelen bewegingen van lichamen in een



FIGUUR 3. De drie wetten van Kepler voor de planetenbeweging.

1. *De baan van een planeet is een ellips. In een van de brandpunten daarvan staat de zon.*
2. *In gelijke tijden T_1 en T_2 doorloopt de voerstraal zon-planeet gelijke oppervlakten O_1 en O_2 . In formule $T_1 = T_2 \rightarrow O_1 = O_2$ (zie figuur).*
3. *De derde macht van de halve lange as a van de door een planeet doorlopen ellips is evenredig met het kwadraat van de omlooptijd T . In formule $a^3 : T^2 = \text{constant}$.*

weerstandsloze euclidische ruimte. Maar hoe is dat bij de planeten? Bewegen zij inderdaad in zo'n lege ruimte? Ruim dertig jaar eerder had de Franse filosoof René Descartes in zijn *Principia philosophiae* (1644) een wereld beschreven, die volledig gevuld is. In deze wereld worden de planeten meegesleept door een wervel uiterst fijn verdeelde hemelmaterie, die om de zon beweegt. Krachten die op afstand werken, en dus niet het gevolg zijn van botsende of drukkende materiedeeltjes, bestaan in deze wereld niet.

De cartesische kosmologie was succesvol gebleken: het oude aristotelische wereldbeeld met zijn eindige kosmos, zijn centrale aarde, zijn nadruk op eigenschappen en kwaliteiten van dingen en zijn scherpe tweedeling in een onder- en bovenmaanse wereld, was er in het tijdsbestek van een halve eeuw grotendeels door verdrongen. Newton is zich daarvan goed bewust. Zijn wiskundig bouwsel kan alleen model staan voor de bewegingen aan de hemel, als hij aantoonde dat de werveltheorie van Descartes niet deugt. Dat bewijs levert hij aan het eind van boek II van de *Principia* en dan pas is de weg dus vrij voor Newton om de beginselen uit boek I los te laten op de hemelbewegingen.

Er is echter nog een probleem. In Newtons geconstrueerde wereld geldt slechts één mechanica voor alle bewegingen die daarin plaatsvinden. Maar wie zegt dat ook in onze 'werkelijke' wereld van de verschijnselen op iedere plek dezelfde wetten heersen? Tweeduizend jaar lang was de aristotelische gedachte springlevend gebleven dat er op aarde en in haar omgeving geheel andere bewegingswetten golden dan in het gebied van de hemellichamen. Newton gaat

er blijkbaar van uit dat zijn wetten universele geldigheid bezitten, tot in alle uithoeken van het heelal. Maar dat zal hij dan wel aan zijn lezers moeten uitleggen.

Het gaat dus om de vraag: hoe pas je bewegingswetten uit een abstracte mathematische wereld toe op de wereld van de verschijnselen? Wat zijn daarvoor de ‘spelregels’? Newton heeft er zelf aan het begin van boek III een paar gegeven, de zogenaamde *regulae philosophandi* (rules of reasoning, figuur 4), regels dus die als leidraad dienen bij filosofische (wetenschappelijke) redenerin-

Regel 1:

*Men moet niet meer oorzaken van gebeurtenissen in de natuur aanne-
men dan die welke waar zijn en die voldoen voor de verklaring van de
verschijnselen.*

Regel 2:

*En daarom moeten aan natuurwerkingen van dezelfde soort dezelfde oorza-
ken worden toegekend, voor zover mogelijk.*

Regel 3:

*Eigenschappen van lichamen die niet kunnen worden versterkt of verzwakt
en die toekomen aan alle lichamen waarmee men experimenten kan verrich-
ten, moeten voor eigenschappen van alle lichamen worden gehouden.*

Regel 4:

*In de experimentele natuurwetenschappen moeten stellingen (wetten) die
door middel van inductie uit de verschijnselen zijn verkregen, voor volkomen
waar of bij benadering waar worden gehouden, ondanks dat een daarmee
strijdige hypothese kan worden verzonnen, totdat zich andere verschijnselen
hebben voorgedaan, waardoor ze meer vast komen te staan of onderhevig
blijken te zijn aan uitzonderingen.*

FIGUUR 4. Newtons ‘*regulae philosophandi*’ (‘rules of reasoning’)

gen. Deze *regulae* laten zich als volgt kort samenvatten: de natuur is uniform en eenvoudig; langs empirische weg vastgestelde onveranderlijke eigenschappen mogen algemeen gemaakt worden en empirisch verkregen wetten zijn alleen corrigeerbaar op basis van nieuwe empirische gegevens, en niet op grond van oncontroleerbare hypothesen.

De *regulae philosophandi* worden door Newton als algemene regels gepresenteerd, maar de lezer van de *Principia* krijgt sterk de indruk dat ze achteraf geconstrueerd zijn om de toepassing van zijn bewegingswetten op de planeetbewegingen te rechtvaardigen, en vooral ook om zijn principe van de algemene gravitatie te formuleren en te gebruiken. In boek I is bewezen: als in een systeem de Keplerwetten gelden, dan is de centrale kracht F omgekeerd evenredig met r^2 . Welnu, in het systeem van Jupiter en zijn manen gelden de Keplerwetten, dus bewegen deze manen volgens de omgekeerde-kwadraatwet.

Hetzelfde geldt voor een aantal andere systemen: dat van zon en planeten, van Saturnus en zijn manen en van de aarde en haar maan. Mathematische behandeling van gegevens over de maanbeweging bood steun aan Newtons geniale gedachte dat de maan zwaar is ten opzichte van de aarde, zodat in het aarde-maan systeem het begrip centrale kracht overbodig wordt en vervangen kan worden door gravitatie of zwaarte(kracht). Maar dan geldt dat op grond van Newtons eenvouds- en uniformiteitsregels ook voor de andere systemen.

Zijn eindconclusie is dan ook dat in al de genoemde systemen de bewegingen plaats vinden onder invloed van een en dezelfde zwaartekracht. Vervolgens generaliseert Newton deze uitspraak tot de algemene gravitatielwet: tussen elk tweetal lichamen in de kosmos, of het nu sterren of atomen zijn, werkt een kracht volgens de verbindingslijn der zwaartepunten, die evenredig is met de massa's van beide lichamen en omgekeerd evenredig met het kwadraat van hun afstand. Deze vergaande stap wordt alleen gerechtvaardigd door de generalisatieregels, en niet door de empirie: door gravitatie verklaarbare effecten tussen atomen waren immers voor Newton niet waarneembaar, evenmin trouwens als tussen ver verwijderde sterren.

NEWTON CONTRA DESCARTES

In het voorwoord van de Principia suggereert Newton dat zijn beschrijving van het wereldsysteem in boek III met behulp van zijn gravitatie-theorie niet meer is dan een voorbeeld bij de wiskundige beginselen van de eerste twee boeken. In werkelijkheid speelt echter de gravitatie een centrale rol. En juist hierop richtte zich de kritiek van de cartesianen, onder wie onze landgenoot Christiaan Huygens, en van Leibniz en zijn aanhangers. Newtons mathematisch talent, zoals hij dat getoond had in de boeken I en II stond niet ter discussie. Maar het ging blijkens de titel -Wiskundige beginselen van de natuurfilosofie- niet om die beginselen als zodanig, maar om beginselen van de natuurfilosofie (natuurwetenschap) en juist de natuurverklaring die Newton in boek III gaf, konden zij niet accepteren, omdat hij daarin een gravitatiebeginsel introduceerde dat (hemel)lichamen die niet met elkaar in verbinding staan, een werking op elkaar laat uitoefenen. Let wel, het is dus niet de gravitatielwet, maar het gravitatiebeginsel dat wordt verworpen, omdat Newton daarvoor geen achterliggend mechanisme kon geven.

Het credo van de mechanistische natuurbeschouwing was immers dat elk verschijnsel verklaard diende te worden door contactwerking (druk of stoot) van bewegende materiedeeltjes. Welke verschillen er tussen cartesianen en leibnizianen ook bestonden, het was voor beide groepen ondenkbaar dat je een bona fide verklaring van een verschijnsel kon geven, die niet gebaseerd was op een werkende oorzaak in de vorm van botsende en duwende deeltjes. Omdat Newton zo'n verklaring voor de gravitatie niet bijleverde in de Principia, werd hem verweten dat hij terugviel in de duisternis van de Middeleeuwen met zijn aristotelische natuurbeschouwing, waarin verschijnselen werden verklaard door eigenschappen of kwaliteiten die in dingen zetelen, verborgen ('occulte') hoedanigheden, die willekeurig aan elke plant, steen of geneesmiddel werden

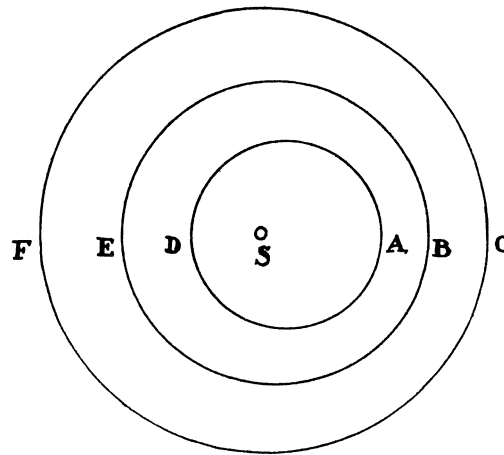
toegeschreven. Prachtig is de persiflage hierop van Molière, die in *Le malade imaginaire* (1673) een kandidaat in de geneeskunde op de examenvraag waarom opium slaapverwekkend is, laat antwoorden dat het een slaapverwekkende eigenschap heeft, tot grote tevredenheid van de examinatoren. De mechanistische natuurfilosofie van Descartes had juist met dit nietszeggende verbalisme definitief afgerekend. En nu komt Newton ons vertellen dat in ieder stoffelijk ding de eigenschap ‘zwaarte’ zetelt. Als dat geen stap terug is, wat dan wel?

Is dit verwijt terecht? In eerste instantie niet. Geheel anders dan met de slaapverwekkende eigenschap van het opium in het stuk van Molière het geval was, kon Newton op basis van de gravitatie toetsbare, kwantitatieve uitspraken doen. Bovendien heeft hij in de heftige debatten over zijn gravitatieprincipe telkens weer betoogd dat gravitatie als zodanig een waarneembaar feit is, maar dat hij zich niet uitsprak over een achterliggend mechanisme. Het verwijt dat hij in werking-op-afstand (*actio in distans*) geloofde, treft wel heel wat newtonianen, maar niet Newton zelf. In zijn *Principia* hanteerde hij haar slechts als een mathematische grootte, waarvan de fysische oorzaak hem onbekend was. Er zit echter ook een kern van waarheid in de geuite beschuldiging, omdat Newton, zodra de verschijnselen daar aanleiding toe gaven, oorzaken accepteerde die in cartesiaanse zin ‘verborgen’ waren. Ik kom daar nog op terug.

In dit debat is overigens geen sprake van eenrichtingsverkeer, want Newton keerde zich op zijn beurt scherp tegen sommige aspecten van de cartesiaanse natuurbeschouwing. De enige wezenlijke eigenschappen van de materie waren volgens Descartes geometrisch van aard. De consequentie daarvan is dat niet alleen de beweging van deeltjes een belangrijke rol speelt in de verklaring van de verschijnselen, maar ook hun grootte, vorm en ligging. De cartesiaanse fysica steunde in belangrijke mate op allerlei specifieke vormen en afmetingen, die onzichtbaar kleine deeltjes verondersteld werden te bezitten. Zo nam Descartes voor de verklaring van het magnetisme uiterst kleine, schroefvormige magnetische materiedeeltjes aan, die wel door geschikte poriën van magneten en ijzer konden bewegen, maar niet door de poriën van andere stoffen. Dergelijke hypothetisch aangenomen vormen van onzichtbare deeltjes waren Newton een doorn in het oog. Als hij in een beroemd geworden uitspraak zegt: “Hypothesen verzin ik niet”, dan wijst hij hiermee niet hypothesevorming in het algemeen af, maar keert hij zich tegen hypothesen à la Descartes, die een dwingende verklaring voorschrijven en niet op empirische feiten berusten. Daarmee ontwerpt men denksystemen die uiteindelijk op hersenschimmen zijn gebouwd. Zo’n denksysteem is voor hem ook de cartesiaanse werveltheorie.

Met deze achtergrond wordt ook de betekenis van boek II duidelijker. In dit deel van zijn werk bekijkt Newton bewegingsverschijnselen in weerstand biedende media. Hij geeft onder andere een mathematische behandeling van verschillende hydrostatische en hydrodynamische problemen, alsmede van de slinger- en de golfbeweging. Maar één van de voornaamste doelen van boek II lijkt het onderuithalen van Descartes’ werveltheorie te zijn om de weg vrij te maken voor de toepassing van boek I op het zonnestelsel. Door middel van een wiskundige behandeling van de wervelbeweging probeert hij aan te tonen dat

de vortexhypothese in strijd is met de astronomische verschijnselen. Hij laat zien dat een materiedeeltje dat in een wervel rondgaat, een omlooptijd T heeft die evenredig is met R^2 . Deze betrekking zou dus ook voor planeten moeten gelden, als ze in een wervel om de zon bewogen. Dat is echter in strijd met de derde wet van Kepler voor de omlooptijd van planeten waarvoor immers geldt dat T evenredig is met $R^{1\frac{1}{2}}$.



FIGUUR 5. Newton contra de vortexhypothese van Descartes

AD, BE en CF representeren drie banen rond de zon, die tevens het middelpunt is van baan CF. De excentrische banen hebben aphelia A, B en perihelia D, E. Volgens de perkenwet van Kepler zal de baan CF met een eenparige cirkelbeweging doorlopen worden, terwijl het lichaam in baan BE in B versneld en in E vertraagd wordt. Echter, volgens de mechanicawetten zou een wervel in de nauwe ruimte tussen A en C juist sneller moeten bewegen dan in de wijde ruimte tussen D en F. Deze twee conclusies zijn met elkaar in strijd.

Hoe diepgaand Newtons kritiek op de werveltheorie is, blijkt wel uit de algemene slotbeschouwing -het zgn. Scholium Generale- in de tweede editie van de Principia (1713), waarin Newton zijn bezwaren ertegen herhaalt en samenvat, terwijl zij ook op andere plaatsen in zijn werk bestreden wordt. Naast zijn argument dat de derde wet van Kepler de werveltheorie voor het planetensysteem uitsluit, noemt hij ook de beweging van de kometen als bezwaar. De banen van deze bijzondere leden van het zonnestelsel zouden immers dwars door de wervels van planeten heengaan, wat tot onoverkomenlijke verklaringsproblemen leidt. Een andere kwestie is het ongehinderd blijven voortbewegen van de kleine wervels die de planeten om zich heen hebben, binnen de grote wervel van de zon. De waargenomen rotatietijden van de assen, de verhoudingen van snelheden van de planeten en van hun onderlinge afstanden zijn voor hem incompatibel met de vortexhypothese (figuur 5).

Ondanks de lacunes in Newtons bewijs dat de 'wervelmechanica' onverenigbaar is met de derde wet van Kepler, was zijn poging om de vortextheorie omver te werpen succesvol. Diverse voorstanders van de streng-mechanistische natuurverklaring hebben nog gepoogd haar te redden door Newtons gravitatiewet of de derde wet van Kepler uit een wervelmodel af te leiden, onder andere Leibniz en Johann (I) Bernoulli. Hun pogingen zijn echter mislukt. Hoe grondig ermee afgerekend was, blijkt een eeuw na de Principia. Ik verwijs daarvoor nu eens niet naar Laplace -die nog aan bod komt- maar naar Newtons landgenoot William Herschel, die bekend geworden is door zijn systematische exploratie van de stellaire wereld. Herschel gebruikte in 1785 de werveltheorie als metafoor voor alles wat in de natuurwetenschap geen stand houdt. Enerzijds wees hij het op elkaar stapelen van waarnemingen af, zonder er verder iets mee te doen. Anderzijds verzette hij er zich tegen dat natuurwetenschappers hun verbeelding de vrije teugel lieten. Door het eerste bereiken we niets en door het tweede raken we ver van de waarheid af. Verzonnen werelden zullen, zegt Herschel, "verdwijnen als cartesische wervels"...

ACTIEVE BEGINSLEN

Newton had niet alleen scherpe kritiek op Descartes' manier van hypothesvorming, maar ook op andere aspecten van diens mechanistische systeem. Dat heeft een religieuze achtergrond. Newton is weliswaar heterodox in die zin dat hij antitrinitarisch is, maar hij huldigt de klassiek-christelijke visie dat God niet alleen de Schepper, maar ook de Onderhouder en Regeerder van Zijn wereld is. Juist dat laatste heeft alles te maken met zijn afwijzing van de cartesische natuurfilosofie. Ook Newton wilde de natuurverschijnselen beschrijven met behulp van bewegende deeltjes. Maar hij verzette zich in toenemende mate tegen de gedachte dat materie en beweging alles kunnen verklaren. Met name gold dit de levensprocessen en de rijkdom aan (levens)vormen en verschijnselen. Het is voor hem uitgesloten dat deze vormenrijkdom het resultaat is van de toevalsbewegingen van inerte en passieve materiedeeltjes. De mechanische werking daarvan is immers overal eender. Wie, zoals Descartes doet, alles zet op de kaart van de materie alleen, sluit de betrokkenheid van de Schepper bij Zijn schepping per definitie uit. Maar voor Newton is een God die enkel en alleen een wereld creëert en er verder niet permanent bij betrokken is, volstrekt onaanvaardbaar. Het is zijn overtuiging dat God daadwerkelijk en continu bij Zijn schepping betrokken is en blijft.

Daarmee is nog niet de vraag beantwoord hoe deze betrokkenheid handen en voeten krijgt. God is weliswaar de primaire oorzaak van alle dingen en verschijnselen in de natuur, maar Hij is tegelijkertijd zo volstrekt anders dan Zijn schepping, dat Hij wel gebruik moet maken van secundaire oorzaken die tussen Hem en de materiële wereld bemiddelen. Newton ziet dan ook in allerlei processen en verschijnselen intermediaire beginselen aan het werk, die hij tegenover de passieve materie 'active principles' noemt.

Juist in de vraag naar Gods bemoeienis met schepping en geschiedenis door middel van actieve beginselen en 'agents' manifesteert zich de wezenlijke

eenheid tussen Newtons diverse interessegebieden, theologie, kerkgeschiedenis, chronologie en alchemie, wiskunde en natuurwetenschappen. Kort voor het verschijnen van de *Principia* hield hij zich met het probleem van de gravitatie bezig: kan de zwaarte verklaard worden door middel van contactwerking van een of ander medium, zoals Descartes wilde, is het een door God geschapen actief beginsel, of bewerkt God de zwaarte onmiddellijk?

Deze vragen, die hem zijn leven lang hebben beziggehouden, brachten hem tot diepgaand onderzoek van de alchemie. Daar vond hij de tegenpool van het cartesische mechanisme: de wereld als levend organisme tegenover de wereld als machine. Het verschijnsel 'leven' is voor Newton bij uitstek het terrein van actieve beginselen. De grote verscheidenheid van levende vormen ziet hij gerealiseerd door een 'vegetable spirit' (levenwekkende geest), die steeds op gelijke wijze werkzaam is: als een deeltjesaggregaat is gevormd, is de eerste werking van de 'vegetable spirit' in een bestaand 'deeltjesaggregaat' een rottingsproces dat tot chaos leidt en daaruit vindt dan weer generatie plaats. Newton ziet hier allerlei analogieën: het gistingsproces in een klomp deeg, waar de 'fermentatie' de gewenste processen op gang brengt en het generatieproces dat, naar een eeuwenoude gedachte, door inbreng van mannelijk zaad in ongevormde materie op gang komt. Op dezelfde wijze zoekt de alchemist het levenwekkende ferment of zaad van het alchemistisch proces. Niet alleen in de alchemie zag hij werkzame krachten en actieve beginselen, die op de passieve materie inwerken, maar hij vond ze ook in de neoplatonische traditie met haar idee van een wereldziel die de kosmos doordringt met een fermental virtue'. Overtuigd als hij was van de 'analogie van de natuur' kon hij maar één conclusie trekken: overal in de natuur zorgen actieve beginselen als instrumenten van God, die de bron van alles is, voor nieuw leven en nieuwe beweging. Hun activiteit was manifest in tal van verschijnselen, zoals fermentatie, warmte, prikkelgeleiding, gravitatie, elektriciteit en magnetisme, al dan niet gedragen door een uiterst fijne kosmische ether.

De verwevenheid van Newtons opvatting over krachtwerkingen bij fysische en alchemistische verschijnselen is evident. In zijn *An hypothesis explaining the properties of light* (1675) doet hij bijvoorbeeld de suggestie dat alle lichamen samengesteld zijn uit zekere etherische 'geesten' of dampen, die in verschillende mate en in verschillende vormen gecondenseerd zijn. De kracht tot deze vorming en samenballing was in gang gezet door God, toen hij zijn schepselen het bevel gaf toe te nemen en te vermenigvuldigen. Een van deze vermeende 'geesten' is de ether, die Newton onderscheidde in de 'maine flegmatic body of aether' en de verschillende 'aethereal spirits', zoals elektrische en magnetische 'effluvia' (uitvloeisels) en het gravitatieprincipe. Een tweede 'geest', die zich volledig door de eerste verspreid heeft, is licht. En deze twee geesten, ether en licht, werken onophoudelijk op elkaar in, zodat "*nature is a perpetual worker*". Toen Newton de Hypothesis schreef, lag wellicht zijn alchemistisch geschrift *Of Nature's obvious laws & processes in vegetation* (ca. 1672 à 1674) bij hem op tafel, gezien de analogieën:

Thus this Earth resembles a great animal or rather an inanimate vegetable, [that] draws in aethereall breath for its dayly refreshment and vital ferment & transpires again with gross exhalations. And according to the condition of all other things living ought to have its times of beginning youth, old age & perishing. This is the subtle spirit (...), Natures universal agent, her secret fire, the only ferment & principle of all vegetation (...) probable the aether is but a vehicle to some more active spirit (...) This spirit is perhaps the body of light (ca. 1672).

Ook in Newtons latere werk, als zijn denkbeelden meer gerijpt zijn, komen we soortgelijke passages tegen. Zo vinden we in de *Queries van de Opticks* (1704, 1717) een groot aantal opmerkingen over allerlei interacties tussen lichamen, licht en ether. Ook daar wijst hij op de noodzaak van actieve beginselen. Alle verschijnselen wijzen op een afname van beweging, zodat

“there is a necessity of conserving and recruiting it by active Principles, such as are the cause of Gravity, by which Planets and Comets keep their Motions in their Orbs (...). For we meet with very little Motion in the World, besides what is owing to these active Principles. And if it were not for these Principles, the Bodies of the Earth, Planets, Comets, Sun, and all things in them, would grow cold and freeze, and become inactive Masses; and all Putrefaction, Generation, Vegetation and Life would cease, and the Planets and Comets would not remain in their Orbs.”

Terwijl voor ons alchemie en (natuur)wetenschap onverenigbare benaderingen zijn om grip op onze wereld te krijgen, is dit voor Newton niet het geval. Integendeel, modern historisch onderzoek van zijn manuscripten heeft aangetoond, dat hij geen aantrekkende en afstotende krachten als de hoeksteen van zijn fysisch systeem had aangenomen, als hij zich niet intens met alchemie en andere uitingen van de magische traditie had beziggehouden. Ook zijn ariaanse (antitrinirarische) theologie heeft daarbij een essentiële rol gespeeld. Het (goddelijke) actieve beginsel bij uitstek is immers Christus, de Zoon van God, lager dan God zelf, die niet alleen middelaar is tussen God en mensen, maar ook tussen God en Zijn wereld; een middelaar die belast is met alle activiteiten in de natuur, inclusief de gravitatiebewegingen van de hemellichamen.

ORDE EN CHAOS

Toen het Newton gelukt was, kort voor het verschijnen van de *Principia*, met inspanning van al zijn intellectuele krachten aan te tonen dat ook kometen in regelmatige banen om de zon bewogen en evenals de planeten aan de gravitatiewet gehoorzaamden, was de kosmische orde alleen nog maar toegenomen. Toch bood de gravitatie voor Newton geen afdoende verklaring van alle waarneembare orde en regelmaat. Waarom liggen de banen van de planeten nagenoeg in hetzelfde vlak en worden ze in dezelfde richting doorlopen, terwijl de kometen in alle mogelijke vlakken en richtingen bewegen? Waarom hebben de

planeten juist die snelheid, gegeven hun massa en afstand tot de zon, die hen in concentrische banen om de zon doet bewegen, en niet in allerlei excentrische banen zoals de kometen? Geen enkele blinde, natuurlijke oorzaak kan volgens Newton hiervoor aangewezen worden, ook de gravitatie niet. Het kan alleen de hand zijn van een Schepper, die als een bekwaam mechanicus en wiskundige de kosmos volgens plan heeft ingericht, zoals Hij dat wilde. Hij plaatste de zware planeten Jupiter en Saturnus op grote afstand van de zon en van elkaar om te voorkomen dat ze vanwege hun massa het hele planetensysteem ernstig zouden verstoren, met alle gevolgen van dien. Om dezelfde reden bevinden zich ook de veel grotere sterren op immense afstanden bij ons vandaan, zodat de gravitatie geen merkbare invloed op het zonnestelsel heeft. Dankzij Gods blijvende bemoeienis is de kosmos waarin wij geplaatst zijn een stabiele en geordende kosmos. Het is deze orde waarop de achttiende eeuw zo'n sterke nadruk legt. In die eeuw ziet men de gravitatie als de grondwet van de kosmos. Zelfs de kometen zijn erdoor getemd, dankzij Newton, die haar ontdekte.

Toch is er bij Newton zelf ook een andere lijn te ontwaren, namelijk die van een catastrofale vernietiging van de kosmische orde. Dat roept uiteraard vragen op: hoe wordt de orde in de kosmos verstoord en wanneer gebeurt dat? Hoe verhouden zich orde en chaos? De gedachte aan een vernietiging van de kosmos is in eerste instantie ontleend aan de Bijbel. Newton was er op grond van gegevens uit de tweede Petrus-brief van overtuigd dat de huidige wereld aan haar einde zou komen door vuur (2 Petrus 3:7). Maar ook is er op verschillende plaatsen in de Bijbel sprake van een nieuwe hemel en een nieuwe aarde. Een ervan is dezelfde tweede Petrusbrief. Op grond van een tekstcorrectie meende Newton dat de bedoelde passage (2 Petrus 3:13) ruimte liet voor de gedachte dat er sprake is van een opeenvolging van werelden, van kosmische cycli, zoals hij die tegenkwam bij de Stoïci. Hun kosmos is een levend geheel, dankzij zij een *pneuma* of *spiritus*, bestaande uit lucht en vuur. Dit *pneuma* is ook de levensadem die iemand weer verlaat als hij sterft. Bovendien heerst er in deze kosmos een rationele orde en staat zij onder de zorg van de godheid die zelf puur vuur is en actief in de kosmos aanwezig. Dit scheppend vuur staat garant voor een eeuwige kringloop van leven en dood, van het tot leven wekken door levenswarmte en levensadem en het terugvloeien in dit goddelijk vuurbeginsel in een finale wereldbrand.

Wat is nu de samenhang in Newtons denken tussen orde en chaos? Dat heeft te maken met zijn visie op de relatie tussen natuurlijke gebeurtenissen en wonderen.

In de lijn van Augustinus wil Newton geen onderscheid maken tussen natuurlijke gebeurtenissen enerzijds en gebeurtenissen die God wil anderzijds, zoals dat in de Middeleeuwen gangbaar was, maar alleen tussen gebeurtenissen die regelmatig en andere die zelden plaatsvinden. Newton was daarbij echter, veel meer dan Augustinus, op regelmaat gericht, of God nu rechtstreeks werkte of door secundaire oorzaken. Tenslotte had hijzelf de wet van de constant werkende gravitatie, die zoals hij meende in oude tijden al bekend was, maar waarvan de kennis later verloren was gegaan, opnieuw tevoorschijn gehaald.

Newton had dus een ‘agent’ (‘werker’) nodig die twee dingen verenigde: hij moest zowel met onaantastbare regelmaat werkzaam zijn als het vermogen bezitten de ongewone, weinig voorkomende gebeurtenissen te bewerkstelligen. Hij vond een dergelijke ‘werker’ in kometen. Volgens hem zal een komeet die in een gesloten baan om de zon beweegt, door de aantrekkende kracht van naburige planeten in die baan vertraagd worden en na een aantal rondgangen tenslotte op de zon storten. Als dat gebeurt, neemt de de zonnehitte zo sterk toe dat alle leven op aarde onmogelijk wordt. Destructie is echter niet de enige functie die Newton aan kometen toekent. Wanneer een komeet op de zon stort zal deze worden hersteld en met nieuw helderheid schijnen. Tegelijkertijd zal de staart van de komeet alle planetaire fluida opnieuw vullen met vocht en actieve beginselen en zo alle processen in het zonnestelsel reactiveren. Het is deze visie van Newton op kometen als permanente leden van het zonnestelsel, waardoor de ‘kwellende analyse’ volhield om van een niet-periodieke parabolische approximatie te komen tot gesloten elliptische banen met een constante periode.

Newtons favoriete komeet voor de catastrofale vernietiging door vuur die in de Bijbel wordt genoemd, was niet de bekende komeet van Halley, maar de komeet van 1680. Hij kon niet zeggen, wanneer deze komeet met zijn periode van ruim vijfhonderd jaar op de zon zou storten, maar hij vermoedde dat dit na vijf of zes ronden wel zou gebeuren, met alle apocalyptische gevolgen van dien. Er was echter meer van te zeggen: volgens Newton droeg de aarde sporen van vernietiging die niet geheel verklaarbaar waren met de noachitische zondvloed en dus een andere oorzaak hadden. Hiermee zinspeelde hij blijkbaar op eerdere wereldbranden, die eveneens door een komeet waren veroorzaakt. Voor het opnieuw bevolken van die vernietigde wereld was de hand van een machtige Schepper nodig, dezelfde die alle omwentelingen van de hemellichamen bestuurde. Zowel de huidige constellatie van de kosmos als de daaruit voortkomende chaos en de vernieuwing die erop volgt, maken alle deel uit van het oorspronkelijke volmaakte plan van God.

Als Newton uit zijn onderzoek in de Principia tot de conclusie komt dat “kometen een soort planeten zijn”, is dat ongehoord. Kometen waren altijd als volstrekt vreemde verschijningen beschouwd die niets met orde en regelmaat te maken hadden en juist daarom weinig goeds voorspelden. Het waren boden van onheil: omdat de kometen de gewone loop der dingen aan de hemel doorbraken, kondigden zij daarmee aan dat weldra ook de gewone loop der dingen op aarde door Gods straffende hand doorbroken zou worden. Maar bij Newton vindt een fundamentele verschuiving plaats. De kometen verliezen hun grillig en buitenissig karakter en veranderen van voorboden in bewerkers van onheil en ondergang, juist door hun geordende beweging.

In Newtons kometenonderzoek komen verschillende facetten van zijn studie samen: de wiskunde als instrument om de periodiciteit van kometen te bepalen, wat noodzakelijk vooraf moest gaan om hun kosmische functies vast te stellen. Vervolgens gebruikte hij de kometen als oorzaken die op volstrekt natuurlijke wijze een verklaring boden voor de overeenkomst tussen de gewijde

en de natuurlijke historie, speciaal voor het samenvloeien ervan aan het einde der tijden in de uiteindelijke wereldbrand, zoals de Heilige Schrift daarvan spreekt. Tot die dag van het eindgericht dienen de kometen de wil van God om, samen met solaire en stellaire emanaties, een bron te verschaffen voor de goddelijke activering van micromaterie, om die tot leven te wekken en zo de vele mooie en kunstige vormen te realiseren die God tot stand wilde brengen. Door deze emanaties wordt de goddelijke wil met de materie verbonden en de actieve beginselen van cohesie en fermentatie, van elektriciteit en licht opgewekt. Tenslotte leidt de restauratie van het ware filosofische verstaan van de kometen de mensheid een stap dichterbij de restauratie van de ware religie en de aanbidding van de ene ware God, die om Zijn werken aanbeden wil worden. Zo wordt het begrijpelijk waarom William Whiston, een leerling van Newton, kan zeggen dat de Principia het preludium is en de voorbereiding op de wederherstelling van alle dingen waarover God vanaf het begin van de wereld gesproken heeft door Zijn profeten. Newtons hoofdwerk is meer dan een boek over hemelmechanica.

STORINGSPROBLEMEN

Het werk van Newton verschaftte het denkkader waarbinnen de natuurwetenschap zich de komende twee eeuwen zou bewegen. In het voorwoord van de Principia had hij de suggestie gedaan het door hem begonnen onderzoek voort te zetten met als uitgangspunt dat aan alle verschijnselen krachtwerkingen ten grondslag liggen. In zijn voetspoor werd in de achttiende eeuw dan ook niet alleen de mechanica verder uitgebouwd, maar ging men ook op zoek naar krachtwetten voor verschijnselen als magnetisme, elektriciteit en capillariteit. In Nederland was het newtonianisme reeds vroeg bekend, maar de eigenlijke doorbraak kwam na 1715. Vooral de hoogleraren Willem Jacob 's Gravesande en Petrus van Musschenbroek hebben door hun onderwijs en leerboeken in de periode 1720-1760 een belangrijke bijdrage geleverd aan de verspreiding van het newtonianisme op het vasteland van Europa. Frankrijk bleef nog geruime tijd een cartesiaans bolwerk, maar mede door het populariserende boek *Élimens de la philosophie de Neuton* (1736, vgl. figuur 10) van Voltaire, die in Leiden 's Gravesande had bezocht, kregen de ideeën van Newton na 1740 ook in Frankrijk grote invloed.

Juist daar hebben onderzoekers als Clairaut, d'Alembert, Lagrange en Laplace -naast o.a. Euler in Duitsland- belangrijke bijdragen geleverd aan de verdere ontwikkeling van de hemelmechanica op basis van de (kracht)wetten van Newton. Het eenvoudigste probleem, de vraag naar de aard van de baan van een lichaam dat een aantrekkende kracht ondervindt van een ander lichaam, was reeds door Newton opgelost: beide lichamen bewegen in een ellips rond het gemeenschappelijk zwaartepunt. Het drie-lichamen-probleem, dus de vraag hoe een lichaam A beweegt onder invloed van twee lichamen B en C, had Newton in zijn algemeenheid niet kunnen oplossen. De problemen daarbij zijn dermate groot dat het volgens hem de menselijke krachten te boven gaat. Wanneer A een sterke invloed ondergaat van B en slechts een zwakke van C, kan men het

drie-lichamen-probleem als storingsprobleem opvatten: hoe wordt de ellipsbaan die A onder invloed van B uitvoert, verstoord door de aanwezigheid van C? Zo'n systeem is bijvoorbeeld het maan-aarde-systeem, met de zon als storend lichaam, als tenminste de -zeer kleine- storingen van de andere hemellichamen verwaarloosd worden.

Omdat men dringende behoefte had aan een goede maantheorie om daarmee het probleem van de lengtebepaling op zee op te lossen, was het drie-lichamen-probleem (en in het algemeen het meer-lichamen-probleem) niet alleen maar een theoretisch vraagstuk. Het duurde echter tot 1750 voordat het systematisch werd aangepakt. Dat heeft voor een deel te maken met de heftige discussies over de wenselijkheid van een mechanistische interpretatie van de gravitatie, alvorens ermee aan de slag te gaan, en voor een deel ook met de ontoereikendheid van beschikbare wiskundige technieken. Een belangrijke stap deden Euler, Clairaut (figuur 6) en anderen, toen zij de oude geometrische metho-



FIGUUR 6. Leonhard Euler (1707-1783) Alexis-Claude Clairaut (1713-1765)

den, zoals Newton die nog in de Principia gebruikt had, loslieten en een geheel analytische behandeling nastreefden, uitgaande van een stelsel differentiaalvergelijkingen. Het opstellen en oplossen van dergelijke stelsels maakte de kern uit van de ontwikkelde storingstheorieën. Een fundamentele bijdrage hieraan leverde Euler, toen hij in 1739 alle regels gaf voor differentiatie en integratie van goniometrische functies en ze gebruikte bij het oplossen van lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten. Tien jaar later bracht hij het vraagstuk van de drie lichamen terug tot een stelsel van drie differentiaalvergelijkingen van de tweede orde. Hij moest echter na veertig jaar onderzoek tot zijn spijt vaststellen dat hij niet in staat was het drie-lichamen-probleem op te lossen. Maar dat niet alleen, ook de methoden die hij gebruikte om een benaderde oplossing te vinden, plaatsten hem voor immense problemen. Ook toen deze approximatiemethoden, waarvan reeksontwikkeling een essentieel onderdeel is, door latere wiskundigen als Lagrange en Laplace sterk verbeterd waren, bleven deze problemen omvangrijk.

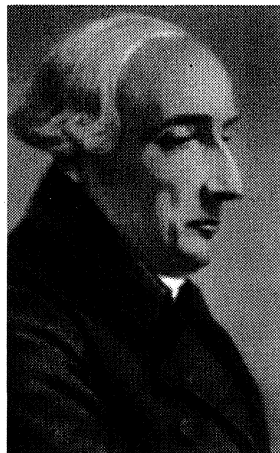
De storingstheorie werd niet alleen op de maanbeweging toegepast, maar

ook op de beweging van de twee grootste planeten, Jupiter en Saturnus. In 1625 had Kepler in de banen van deze planeten onregelmatigheden waargenomen. Al gauw werd daarna duidelijk dat de beweging van Jupiter een versnelling te zien gaf en die van Saturnus een vertraging. Newton had hierover in de *Principia* opgemerkt dat de storing in de baan van Saturnus ten gevolge van de aantrekking van Jupiter het sterkst zou zijn bij conjunctie van de twee planeten. Hierdoor blijkbaar geïnspireerd besloot de Parijse Academie in 1748 een prijs uit te loven voor een theorie van Jupiter en Saturnus om de afwijkingen te verklaren die deze planeten in elkaars banen teweegbrengen, speciaal wanneer ze in conjunctie zijn. Wat was de oorzaak van de afwijkingen? Kon men ze toeschrijven aan de onderlinge aantrekking en waren ze te berekenen met de gravitatiewet?

Als antwoord op deze prijsvraag schreef Euler zijn *Recherches sur la question des inegalités du mouvement de Saturne et de Jupiter* (1749). Dit werk, waarin overigens alleen de onregelmatigheden in de baan van Saturnus werden beschreven, werd weliswaar bekroond vanwege de fraaie nieuwe theoretische afleidingen, maar het eigenlijke probleem werd toch niet werkelijk opgelost. Daarvoor waren de verschillen tussen de waargenomen en de berekende lengten van Saturnus te groot. De prijsvraag werd daarom herhaald in 1750 en in 1752, zonder dat dit het gewenste resultaat had.

DE STABILITEIT VAN HET ZONNESTELSEL: LAGRANGE EN LAPLACE

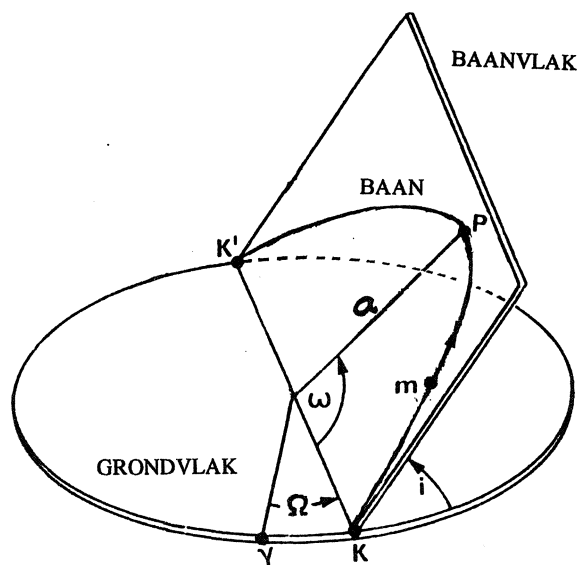
Behalve Euler, leverden ook Clairaut en d'Alembert een bijdrage aan de storingsdiscussie, maar dan toegepast op de maanbeweging. Een wezenlijk nieuwe bijdrage aan de verdere oplossing van deze astronomische problemen kwam van Lagrange (figuur 7), die de methoden van Euler perfectioneerde, en ze boven-



FIGUUR 7. Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

dien een elegantere vorm gaf. Vele van de door hem geïntroduceerde algoritmen werden snel gemeengoed onder mathematici en fysici. Lagrange poogde niet

alleen de perturbatie-problematiek van het Jupiter-Saturnus-systeem op te lossen, maar van het gehele planetenstelsel.



FIGUUR 8. Baanelementen

a	: halve lange as	Ω	: lengte van de klimmende knoop
τ	: lentepunt	i	: inclinatie
K	: klimmende knoop	P	: perihelium (pericentrum) van de baan
KK'	: knopenlijn	ω	: argument van het perihelium
m	: planeet		

Sinds 1764 maakte hij in zijn berekeningen gebruik van het principe van de virtuele snelheden, dat hij later in 1788 tot hoeksteen van zijn *Mécanique analytique* maakte: als we aan een deeltjes/lichamensysteem in statisch evenwicht een kleine beweging geven en het product vormen van elke kracht met de component van de verplaatsing in de richting van de kracht, dan is de som van deze producten gelijk aan nul. In 1772 kregen hij en Euler een gedeelde prijs voor hun inzendingen op de prijsvraag van 1768, die vroeg naar verbetering van de methoden waarop de maantheorie steunt. Euler kreeg hem voor een verbeterde maantheorie, Lagrange voor zijn algemene behandeling van het drie-lichamen-probleem. De methode die Lagrange in dit *Essai sur le problème des trois corps* gebruikte was nieuw. Als eerste bepaalde hij de bewegingen van de lichamen ten opzichte van elkaar in termen van de onderlinge afstanden. Hierdoor reduceerde hij het systeem van differentiaalvergelijkingen van de twaalfde tot de zevende orde, een reductie die na hem nog één stap verder gebracht zou worden. Een vernieuwing die Lagrange in een -opnieuw bekroonde-verhandeling

Sur l'équation séculaire (1774-75) invoerde, was het gebruik van een potentiaal-functie voor het bepalen van de totale storende kracht in een gegeven richting. Hij behandelde hierin met nieuwe methoden het probleem van de lange-termijn variaties van de knopen en inclinaties van de toen bekende zes planeten.

Om de beweging van een planeet volledig vast te leggen heeft men zes gegevens nodig, de zogenaamde baanelementen (figuur 8). Men zou daarvoor de plaats- en snelheidsvectoren kunnen nemen, elk in drie richtingen, maar gewoonlijk neemt men hiervoor de volgende drie tweetallen: 1. Men bepaalt de positie van het baanvlak ten opzichte van een gekozen grondvlak (bijv. de ecliptica) door twee hoeken, namelijk de lengte Ω (de hoek van de klimmende knoop K ten opzichte van een gekozen richting (bijv. het lentepunt) en de inclinatie i (de hoek tussen baanvlak en grondvlak); 2. De (niet gestoorde) ellipsbaan waarop de planeet beweegt, ligt vast door de halve lange as a en de numerieke excentriciteit e (het quotiënt van de afstand van middelpunt tot brandpunt en de halve lange as a); 3. de positie van de planeet op de ellipsbaan ligt vast door het argument ω van het perihelium of pericentrum P (de hoek tussen de knopenlijn KK' en de verbindingslijn van de zon en het perihelium) en de epoche t_0 (een gekozen tijdstip waarop de planeet m door P gaat). Lagrange toonde in deze verhandeling aan dat in een twee-planetensysteem de inclinaties van de banen ten opzichte van een gekozen grondvlak binnen vaste grenzen oscilleren en dat de knopen, afhankelijk van zekere constanten een retrograde beweging maken dan wel eveneens binnen bepaalde grenzen oscilleren. Onder voorwaarde dat de wederzijdse inclinaties van de banen twee aan twee klein waren, kon Lagrange dit probleem ook voor een meer-lichamen-systeem behandelen. Omdat blijkbaar ook lange-termijn veranderingen periodiek konden zijn, was hiermee tevens aangetoond dat periodiciteit niet langer als criterium kon dienen om onderscheid te maken tussen de oorspronkelijk niet-periodieke geachte lange-termijn storings (seculaire ongelijkheden) en periodieke korte-termijn storings (periodieke ongelijkheden). Lagrange bleef overigens de storingsveranderingen wel in deze twee categorieën opdelen. Bij seculaire ongelijkheden gaat het dan om langzame veranderingen, die in formules konden worden uitgedrukt waarin de posities van de planetenbanen niet voorkomen, terwijl het bij periodieke ongelijkheden gaat om veranderingen die zich in korte tijd voltrekken en die juist van de baanposities afhangen.

In 1788 verscheen Lagranges hoofdwerk *Mécanique analytique*, waarin hij de gehele mechanica wilde beschouwen als een rationele wetenschap, die geheel analytisch wordt behandeld. De theorie voor het oplossen van mechanische problemen diende gereduceerd te worden tot algemene formules. Niet zonder trots vermeldt hij dat diagrammen in het boek ontbreken. Zijn methoden stoelen alleen op algebraïsche operaties, want geometrische of mechanische constructies zijn taboe.

Het werk van Lagrange was richtinggevend voor veel onderzoek van latere datum, met name dat van zijn dertien jaar jongere tijdgenoot Laplace (figuur 9). Lange tijd waren Lagrange en Laplace in zekere zin elkaars rivalen. Een publicatie van de één lokte dikwijls weer een verhandeling van de ander uit.



TRAITÉ DE MÉCANIQUE CÉLESTE,

PAR P. S. LAPLACE,

Membre du Sénat conservateur, de l'Institut national, et du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés royales de Londres et de Göttingue; des Académies des Sciences de Russie, de Danemark, d'Italie, etc.

TOME TROISIÈME.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

A PARIS,

Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques,
quai des Augustins.

AN XI — 1802.

FIGUUR 9. Pierre-Simon Laplace (1749-1827) en titelblad deel III 'Mécanique céleste' (behandelt de storingstheorie van de planeten)

Overigens is de relatie tussen Lagrange en Laplace altijd redelijk goed gebleven. Laplace was minder dan Lagrange geneigd zich mee te laten voeren door de schoonheid van een theorie, en meer gericht op praktische of numerieke resultaten. In zijn eerste publicatie (1776) gaf hij een bespreking van de gravitatiewet van Newton en behandelde hij de seculaire ongelijkheden van de planeten. De meest cruciale daarvan betreft de gemiddelde beweging (lengte) van een planeet. Die was volgens Laplace tot nog toe niet nauwkeurig genoeg bepaald. In 1752 had Euler uit zijn berekeningen de conclusie getrokken dat op dat moment Jupiter en Saturnus ten gevolge van hun onderlinge aantrekking beiden versnelden en in 1766 had Lagrange vastgesteld dat de gravitatie de beweging van Jupiter versnelde en die van Saturnus vertraagde. Maar volgens Laplace waren beide gevolgtrekkingen onjuist. Uit zijn ingenieuze berekeningen concludeerde hij dat de seculaire ongelijkheden van de gemiddelde beweging gelijk aan nul waren. De waargenomen versnelling van Jupiter en vertraging van Saturnus moesten dus een andere oorzaak hebben dan wederzijdse gravitatie: wellicht waren die het gevolg van de werking van kometen.

Problemen waren er dus nog genoeg. In een brief aan Lagrange schreef Laplace dat hij terugschrok voor verder onderzoek vanwege de onzekerheid over de massa's van de andere vier planeten en over de mate van storing die ze onder-

vinden door de krachtwerking van kometen. Lagrange begon zich echter na de publicatie van Laplace weer intensief met planetaire storingen bezig te houden en de daarmee samenhangende vraag naar de stabiliteit van het zonnestelsel.

In 1783 stelde hij opnieuw vast dat de gemiddelde voerstraal van een planeet geen seculaire veranderingen onderging. Dat leverde dus geen problemen op voor de stabiliteit van het zonnestelsel. Ook de eventuele niet-periodieke beweging van knopen en apsiden brengt de stabiliteit van het zonnestelsel niet in gevaar. De veranderingen in de eccentriciteiten en inclinaties van een storende planeet kunnen echter wel gevolgen hebben voor de gemiddelde beweging van de verstoorde planeet. Toen Lagrange op basis van de gravitatietheorie dit effect voor het Jupiter-Saturnus-systeem berekende, vond hij, evenals Laplace in 1776, maar anders dan zijn eigen eerste berekening in 1766, dat het verwaarloosbaar was.

De empirisch vastgestelde seculaire acceleratie van Jupiter en de seculaire vertraging van Saturnus konden blijkbaar niet het gevolg zijn van gravitationele werkingen. Wat de andere vier planeten betreft, was het onbekend zijn van hun massa's een moeilijkheid. Lagrange omzeilde dit probleem door een -onjuist gebleken- relatie te gebruiken die hij vond tussen de massa's van de aarde, Jupiter en Saturnus. Zijn eindconclusie was:

“Krachtens hun wederzijdse aantrekking veranderen de planeten onmerkbaar de vorm en positie van hun banen, maar zonder ooit bepaalde grenzen te overschrijden. De hoofdassen blijven onveranderlijk. Althans, de gravitatietheorie impliceert slechts veranderingen die periodiek zijn en afhankelijk van de positie van de planeten.”

Geïnspireerd door dit resultaat van Lagrange, nam ook Laplace het storingsonderzoek opnieuw ter hand. In 1785 verscheen zijn *Sur les inégalités séculaires des planètes*. Nieuwe procedures, geïnitieerd door Lagrange, stelden Laplace reeds in 1776 in staat de tijd t uit zijn differentiaalvergelijkingen te elimineren. Uiteindelijk was hierdoor een methode ontwikkeld, waarmee alle storingen bepaald konden worden, zowel seculaire als periodieke, en die hij in 1785 toepaste op het Jupiter-Saturnus systeem.

Strikt genomen zijn de bewegingen van elk tweetal planeten incommensurabel, dat wil zeggen, in de tijd dat een planeet zijn baan een aantal malen doorloopt, is dat nooit het geval bij een andere planeet. Er zijn echter wel voorbeelden van bijna-commensurabiliteit. Vijf omlopen van Jupiter en twee van Saturnus vinden in ongeveer dezelfde tijd plaats, dat wil zeggen, de grootte $(5T - 2T')/T$ (T en T' zijn de omlooptijden) ligt kort bij 0. Omdat de gemiddelde beweging n omgekeerd evenredig is met de omlooptijd T , geldt dus dat de grootte $v = (5n' - 2n)/n$ dicht bij 0 ligt. Om precies te zijn: $v \approx n/74$. De differentiaalvergelijkingen voor de lengte van de planeten bevatten termen $p \sin(qt + r)$, waarin de p 's functies zijn van de eccentriciteiten en inclinaties en q een lineaire combinatie is van n en n' met gehele coëfficiënten. Als deze sinus-termen gerangschikt worden naar toenemende machten van de eccentriciteiten en inclinaties in de functies p , dan blijkt dat ze in het algemeen al snel

verwaarloosd kunnen worden. De dubbele integratie naar t van deze termen, die nodig is om de ongelijkheden voor de lengte te vinden, leidt tot termen met $p \sin(qt + r)/r^2$, die in het geval van Jupiter en Saturnus niet verwaarloosbaar zijn, als $q = v$, omdat v^2 erg klein is.

Dit resultaat onderstreept het belang van zogenaamde resonantietermen, dwz. van bijna-commensurabiliteiten in de gemiddelde beweging. Termen $p \sin(vt + r)$ in de formules voor de lengte (gemiddelde beweging) zullen dus slechts langzaam veranderen. Laplace berekende dat de zeer lange periode van de seculaire ongelijkheden van het Jupiter-Saturnus systeem gelijk was aan 817 jaar (een herberekening in 1788 leidde tot 929 jaar). Zijn theorie van het Jupiter-Saturnus systeem was geheel in overeenstemming met oude en moderne waarnemingen en bevestigde opnieuw Newtons gravitatiewet als de ultieme formule voor de beschrijving van de planeetbeweging in het zonnestelsel.

Aangezien volgens de derde wet van Kepler $T^2 = c \cdot a^3$ en dus $n^2 a^3 = \text{constant}$, was hiermee aangetoond dat de gemiddelde halve lange as slechts kleine periodieke variaties onderging. Zoals we al gezien hebben, is dat echter niet genoeg voor stabiliteit, want een grote verandering in de eccentriciteiten van twee planeetbanen kan bewerken dat deze banen elkaar snijden, met alle gevolgen van dien. In een laatste poging de stabiliteit van het zonnestelsel definitief te bewijzen, onderzocht Laplace daarom nog de eccentriciteiten en inclinaties. Uiteindelijk kwam hij, een jaar voor het uitbreken van de Franse revolutie, tot de conclusie dat

“het wereldsysteem slechts oscilleert rond een gemiddelde toestand, waarvan het niet afwijkt, behalve dan een zeer kleine hoeveelheid. Krachtens zijn samenstelling en de wet van de zwaartekracht, geniet het een stabiliteit die alleen vernietigd kan worden door oorzaken van buitenaf, en we zijn er zeker van dat hun werking sinds de tijd van de oudste waarnemingen tot onze dagen toe niet te ontdekken is. Deze stabiliteit in het wereldsysteem, die garant staat voor zijn voortbestaan, is onder alle verschijnselen een van de meest opmerkelijke, omdat het in de hemelen dezelfde intentie om de orde in het universum te bewaren laat zien, die de natuur op zo’n bewonderenswaardige wijze op aarde in acht genomen heeft terwille van de bescherming van individuen en het voortbestaan van soorten.”

Laplace had aangetoond dat de halve lange as van elke planeetbaan constant was, op periodieke variaties na van kleine amplitude en korte periode, en dat de eccentriciteiten en inclinaties slechts onderworpen waren aan periodieke schommelingen om hun gemiddelde waarden, waarbij oscillaties van korte periode waren inbegrepen, die afhankelijk waren van de positie van de planeten en seculaire variaties van de planeetbanen met perioden van ongeveer vijftig duizend tot enkele miljoenen jaren. Er zaten echter in zijn berekeningen twee fundamentele approximaties, waardoor de geldigheid van zijn conclusies mogelijk een lange, maar toch beperkte tijdsduur heeft. Laplace zelf lijkt dit onvoldoende onderkend te hebben. Maar het waren juist de verbeterde benaderingsmetho-

den van Le Verrier, die later de eindconclusie van Laplace op losse schroeven zette.

Laplace hoofdwerk is de *Traité de Mécanique céleste* (1798-1825, figuur 9), waarin hij theoretische beschouwingen combineerde met gedetailleerde toepassingen op een wijze die het boek een wegwijzer deed zijn voor verder onderzoek. Er verschenen dan ook in korte tijd diverse vertalingen. Het was ongetwijfeld het meest invloedrijke werk op het terrein van de hemelmechanica sinds Newtons *Principia*. Alle resultaten van zijn onderzoek waren erin bijeengebracht, waar nodig aangevuld of verbeterd.

DE ACHTTIENDE EEUW

Wij zijn al enkele eeuwen zo vertrouwd met het gravitatieprincipe dat we ons enerzijds niet meer kunnen voorstellen dat cartesianen en leibnizianen er een terugval in de middeleeuwse duisternis in zagen, maar anderzijds kunnen we ook nauwelijks meer aanvoelen wat een geweldige indruk de gravitatiewet op de mensen uit het tijdperk van de Verlichting maakte. Om dat laatste te begrijpen, dienen we ons te realiseren dat, dankzij het werk van Newton, hemelse en aardse bewegingen voor het eerst met één eenvoudige wiskundige wet beschreven leken te kunnen worden. Men raakte er steeds meer van overtuigd dat nu de grondwet van de kosmos was gevonden voor een krachtwerking die zich tot in alle uithoeken van het heelal manifesteerde. Het aanvankelijke verzet tegen Newtons denkbeelden verdween in de loop van de achttiende eeuw tenslotte vrijwel geheel. Hiertoe droegen enkele opmerkelijke successen bij. Door de expedities naar Peru (1735) en Lapland (1736), georganiseerd door de Parijse *Académie des Sciences*, kwam vast te staan dat de aarde aan de polen was afgeplat, zoals Newton op grond van zijn theorie van de zwaartekracht had geconcludeerd, en niet aan de evenaar, zoals de cartesianen meenden. Toen berekeningen aan de apogeumbeweging van de maan twijfels deden rijzen over de juistheid van de exponent 2 in de gravitatiewet, zag Clairaut tenslotte kans te bewijzen dat de waargenomen periode van achttien jaar goed overeenstemde met Newtons theorie. Dezelfde Clairaut zag kans binnen een aanvaardbare foutenmarge de terugkomst van de komeet van Halley te berekenen, die in 1758 verscheen. Tenslotte leken de storingstheorieën van Lagrange, Laplace en Le Verrier, inclusief diens ontdekking van Neptunus (1846) de theorie onaanastbaar te maken. Dezelfde Le Verrier die echter een vraagteken achter de stabiliteit van het zonnestelsel plaatste, kon de afwijkingen van de Mercuriusbaan niet met de gravitatietheorie rechtbreien. Zoals we weten is dat ook aan niemand anders meer gelukt.

De gravitatie, de kleurschifting, de differentiaal- en integraalrekening en het succes van Newtons methode maakten dat hij in de achttiende eeuw als een halfgod werd vereerd. Het distichon van Alexander Pope is overbekend:

Nature and Nature's laws lay hid in night;
God said: 'Let Newton be!' and all was light.

In deze twee regels vatte hij blijkbaar niet alleen Newtons gravitatiewet en

zijn optische ontdekkingen samen, maar bracht hij bovendien het gevoel dat vele achttiende-eeuwers hadden, kernachtig onder woorden, namelijk dat met de grote Brit eindelijk de eeuw van het licht was aangebroken. Voltaire deed voor Pope niet onder, toen hij in een gedicht aan de cherubijnen rond Gods troon vroeg of ze niet jaloers waren op de grote Newton. En op de titelprent van zijn *Éléments de la philosophie de Neuton* zit hij achter zijn schrijftafel en vangt daar iets op van het hemels licht dat Newton omstraalt en via een spiegel in de hand van een vrouw, die mogelijk de (natuur)wetenschap voorstelt, ook de Franse literator verlicht (figuur 10). Newton is voor hem de initiator van



E L É M E N S D E L A P H I L O S O P H I E D E N E U T O N ,

Mis à la portée de tout le monde.

Par M^R. DE VOLTAIRE.



A A M S T E R D A M ,
Chez ETIENNE LEDET & Compagnie.

M. DCC. XXXVIII.

Augmentée des Eclaircissements nécessaires , du
Chapitre XXVI. contenant le Flux & Reflux,
des Tables des Chapitres & Matieres , & du
Portrait de Neuton.

FIGUUR 10. Titelprent en titelblad van Voltaires *Éléments de la philosophie de Neuton*

de Verlichting, bij wie zelfs beroemde staatslieden en veroveraars in het niet zinken.

De grote belangstelling die men in de achttiende eeuw had voor de natuurwetenschappen, niet alleen onder geleerden, maar ook onder de (gegoede) burgerij, is in belangrijke mate aan Newton te danken. Van de vele genoot-

schappen die in de achttiende eeuw werden opgericht, was er een aantal uitsluitend gewijd aan de beoefening van de natuurwetenschappen, waarbij vooral optische en elektrostatische proeven, en experimenten met de luchtpomp erg gewild waren. Bij de hogere standen kwamen ook de dames onder de indruk van de natuurwetenschap in het algemeen en de verdiensten van Newton in het bijzonder. De bellettrie op hun salontafels maakte in vele gevallen plaats voor Francesco Algarotti's *Il Newtonianismo per le Dame* (1737), dat zeven drukken telde en vertaald werd in het Frans, Engels en Nederlands. De volledige Nederlandse titel van dit werk luidt *De Newtoniaansche Wysbegeerte voor de vrouwen, of samenspraaken over het Licht, de Kleuren en de Aantrekkingskracht*. In dialoogvorm wordt een markgravin onderwezen in de fysica van Newton, "deze Goddelijke man, die voor de grontlegger der wetenschappen kan gehouden worden". Voltaires vriendin, de markiezin du Châtelet vertaalde de *Principia* in het Frans, de enige Franse vertaling die er ooit van gemaakt is. In 1796 stelde Champlain de la Blancherie zelfs voor de kalender zo te wijzigen dat Newtons geboortjaar 1642 het jaar 1 zou zijn, terwijl zijn huis in Woolsthorpe een soort heiligdom moest worden ...

De Newton die als een soort boegbeeld van de Verlichting fungeert en die volgens de vroegnegentiende-eeuwse essayist Charles Lamb niets geloofde dan datgene wat even helder en duidelijk was als de drie zijden van de driehoek, heeft weinig met de historische Newton gemeen, die meer papier en inkt besteedde aan theologie, chronologie en alchemie dan aan natuurwetenschap. Het is de laatste decennia steeds duidelijker geworden dat deze gebieden in Newtons denken een eenheid vormen. Ik wees daar al op. We zien dat in de achttiende eeuw Newtons conceptie van de wereld geleidelijk ontdaan wordt van de religieuze connotaties, inclusief zijn denkbeelden van optredende storingen en het bijbehorend beeld van cycli van werelden. Tijd en ruimte die voor Newton in feite accidentia van God zijn, worden in de achttiende eeuw vaste kwantitatieve maten voor de beweging van materie. Dan is de despiritualisatie van de kosmos compleet en is slechts een systeem van massa's overgebleven. Aan Newtons fysicotheologische opvattingen worden zware slagen toegebracht door Hume, de Franse radicalen en later door Kant.

Ook zijn wetenschappelijke argumenten voor Gods betrokkenheid bij de schepping werden in de loop van de achttiende eeuw sterk ondermijnd. In de *Principia* spreekt Newton, zoals we zagen, over wederzijdse werking van Jupiter en Saturnus. We lezen er ook over in de *Opticks*, waar hij over enkele onbetekende onregelmatigheden in de banen van de planeten spreekt, die mogelijk veroorzaakt worden door de wederzijdse werking van kometen en planeten op elkaar en die wellicht zullen toenemen, "till this System wants a Reformation". We hebben echter gezien dat Laplace de stabiliteit van het zonnestelsel uit de gravitatie wist af te leiden en daar erg mee ingenomen is:

"Het leek er aanvankelijk op dat zij [=Jupiter en Saturnus] een uitzondering vormden op de wet van de universele gravitatie; welnu, ze zijn er een van de meest frappante bewijzen van. Zo is het lot geweest van

deze briljante ontdekking van Newton dat elke moeilijkheid die zich voordeed, voor haar het onderwerp van een nieuwe triomf geweest is, wat het zekerste kenmerk is van het ware systeem der natuur.”

Laplace ontnemt hier de God van Newton dus zijn functie van bewaarder en hersteller van de kosmische orde.

Daar blijft het echter niet bij. Newton zelf had ten stelligste ontkend dat het heelal kon ontstaan door mechanische oorzaken. Hij voelde zich gedwongen de vorming ervan aan een ‘intelligent agent’ toe te schrijven. Ook Laplace ziet de noodzaak in van het bestaan van een oorzaak die de bewegingen van de planeten regelt, maar is die oorzaak persoonlijk of onpersoonlijk? Gaat hij doelgericht of mechanisch te werk? Hebben we de hypothese God nodig of kunnen we daaraan voorbijgaan? Overbekend is het verhaal dat Napoleon Laplace de vraag stelde, waar God was in zijn systeem. Het antwoord luidde ”Sire, ik heb deze hypothese niet nodig.”

Ook ten aanzien van het voortbestaan van het zonnestelsel vraagt hij zich af of dat al of niet afhangt van de “auteur de la nature”. Anders dan Newton meende, kan de gravitatie volgens Laplace de stabiliteit niet aantasten. Toch is daarmee niet alles gezegd. Want al zou licht het enige fluidum zijn in de ruimte, dan nog zou op den duur haar weerstand en het massaverlies van de zon de huidige rangschikking vernietigen. Om die te handhaven zou inderdaad een reformatie nodig zijn. Maar waarom zouden we daarop rekenen? Zijn al de uitgestorven diersoorten geen aanwijzing dat de natuur geneigd is zelfs de schijnbaar meest vaste zaken te veranderen? Het zonnestelsel zal, ondanks haar ”grandeur” aan deze algemene wet niet ontkomen.

Op de vraag wie de structuur van het zonnestelsel heeft voorgebracht, zoals wij die nu waarnemen, heeft Laplace in 1796 zijn nevelhypothese ontworpen. Uit een zich samentrekkende nevelmassa werd de zon gevormd samen met een aantal concentrische ringen van gas en stof. Op den duur ontstonden in de ringen stofconcentraties, die zich tenslotte tot in planeet vormden. Hieruit wordt direct duidelijk, waarom de planeten ongeveer in een vlak bewegen en in dezelfde richting. Zowel heden als verleden en toekomst worden geregeerd door dezelfde, onveranderlijke wetten. In het verlengde hiervan ligt zijn in 1812 geformuleerde programma van het wetenschappelijk determinisme:

“We moeten dus de huidige toestand van het heelal beschouwen als het effect van zijn vroegere staat en als de oorzaak van de toestand die erop volgt. Een intelligentie die voor een gegeven ogenblik alle krachten waarmee de natuur in beweging is gezet en de positie met betrekking tot de dingen (“êtres”) waaruit zij is opgebouwd, zou kennen, zou, indien hij verder groot genoeg zou zijn om deze gegevens aan een analyse te onderwerpen, in één en dezelfde formule de bewegingen van de grootste hemellichamen en van het lichtste atoom samenvatten: niets zou voor hem onzeker zijn, en toekomst zowel als verleden zou hij in een oogopslag kunnen overzien. De menselijke geest biedt in de perfectie die hij de astronomie heeft weten te geven een zwak beeld van

deze intelligentie.”

LITERATUUR

1. ANDOYER, H., *L'oeuvre scientifique de Laplace*, (Paris, 1922).
2. BETH, H.J.E., *Newton's 'Principia'*, 2 dln. (Groningen/Batavia, 1932).
3. E.A. BURTT, *The metaphysical foundations of modern physical science* (...., 1924); 2e ed. (....., 1932; repr. Atlantic Highlands, N.J., 1980).
4. COHEN, I.B., *Isaac Newton's Papers & Letters on Natural Philosophy and related documents*, (Cambridge, Mass., 1978).
5. COHEN, I.B., *The birth of a new physics*, (rev. ed., Hammondsworth, 1987).
6. COHEN, I.B., R.S. WESTFALL, *Newton*, (New York/London, 1995).
7. CHRISTIANSON, G.E., *In the presence of the Creator: Isaac Newton and his times*, (New York, 1984).
8. DIJKSTERHUIS, E.J., *De mechanisering van het wereldbeeld*, (Amsterdam, 1950¹, 1990⁴).
9. F. DURHAM & R.D. PURRINGTON (eds.), *Some truer method: Reflections on the heritage of Newton*, (New York, 1990).
10. C.C. GILLISPIE E.A. (eds.), *Dictionary of Scientific Biography*, vol.1-18 (New York, 1970-1990), bijdragen over d'Alembert, Clairaut, Euler, Halley, Lagrang, Laplace, Le Verrier, Newton, Poincaré.
11. DOBBS, B.J.T., *The foundations of Newton's alchemy or 'the hunting of the greene lyon'*, (Cambridge etc., 1975, 1989²).
12. DOBBS, B.J.T., *The Janus faces of genius: The role of alchemy in Newton's thought*, (Cambridge, 1991).
13. FAUVEL, J., E.A., (eds.), *Let Newton be! A new perspective on his life and works*, (Oxford, etc., 1988).
14. GRANT, R., *History of physical astronomy from the earliest ages to the middle of the nineteenth century*, (London, 1852).
15. HAHN, R., *Laplace as a Newtonian scientist*, (Los Angeles, 1976).
16. N.S. HETHERINGTON (ed.), *Cosmology: Historical, Literary, Philosophical, Religious, and Scientific Perspectives*, (New York/London, 1993).
17. HOEVEN, P. VAN DER, *Newton, een inleiding tot zijn wijsgerige inzichten*, (Baarn, 1979).
18. GANDT, F. DE, *Force and geometry in Newton's Principia*, (Princeton N.J., 1995).
19. HALL, A.R., *The revolution in science 1500-1750*, (London/New York, 1983).
20. A. KLUKHUHN (ed.), *De Eeuwende 1700*, Dl.1, *Filosofie en natuurwetenschappen* (Stud. Gen. Rijksuniv. Utrecht, 1991)
21. KOYRÉ, A., *Newtonian studies*, (London, 1965).
22. LAPLACE, P.S., *Traité de Mécanique céleste*, 5 vol. (Paris, 1798-1825; NB. reprint Bruxelles, 1967).

-
23. MONOD, V., *Dieu dans l'Univers*, (Paris, 1933).
 24. [NEWTON, I.], *Sir Isaac Newton's Mathematical principles of natural philosophy and his system of the world*. Translated into English by Andrew Motte in 1729. The translations revised, and supplied with an historical and explanatory appendix, by Florian Cajori (Berkeley/Los Angeles, 1934; pb. 2 dln. 19666).
 25. NEWTON, I., *Opticks: or a treatise of the reflections, refractions, inflections and colours of light*. (...), (London, 1704, 1731; herdruk van vierde editie met 'preface' (I.B. Cohen), 'Foreword' (A. Einstein), 'Introduction' (E.T. Whittaker), 'Analytical table of contents' (D.H.D. Roller), (New York, 1931, 1952).
 26. PANNEKOEK, A., *De groei van ons wereldbeeld*, (Amsterdam/Antwerpen, 1951).
 27. R. TATON & C. WILSON, *Planetary astronomy from the Renaissance to the rise of astrophysics*, 2 vol. (Cambridge, 1989, 1995); dl 2A en 2B van *The general history of astronomy*.
 28. WESTFALL, R.S., *Never at rest: A biography of Isaac Newton*, (Cambridge, 1980).
 29. YOURGRAU, W. E.A. (eds.), *Cosmology, History and Theology*, (New York/London, 1977).



Henri Poincaré

Ferdinand Verhulst
H.W. Broer

Il est parmi les savants comme
un impressionniste parmi les artistes.

Vito Volterra

In dit artikel geven we een schets van leven en werk van Henri Poincaré met nadruk op zijn werk in de nietlineaire dynamica. Zijn activiteiten in de wiskunde, mathematische fysica en filosofie waren buitengewoon veelzijdig en zowel tijdens als na zijn leven had Poincaré veel invloed. Dat laatste geldt alleen niet voor het gebied van de dynamica, althans tot circa 1960. Het is een interessante vraag wat de reden is voor deze lange periode van verwaarlozing van fundamentele resultaten en ideeën.

1. VOORGESCHIEDENIS

In de twintigste eeuw is er nauwelijks een inspirerender en veelzijdiger geleerde te vinden dan Henri Poincaré. Opmerkelijk is bijvoorbeeld dat voor onderzoekers in deze tijd zijn oorspronkelijke werk nog steeds de moeite waard is om te lezen, het zit vol ideeën en suggesties. Normaal is immers dat het werk van wiskundigen opgenomen wordt in de wetenschappelijke literatuur, dat wil zeggen het wordt steeds opnieuw geformuleerd, steeds opnieuw ingebed in de nieuwste theorieën. Dat geldt voor grootheden als Weierstraß en Hilbert, maar slechts ten dele voor Poincaré.

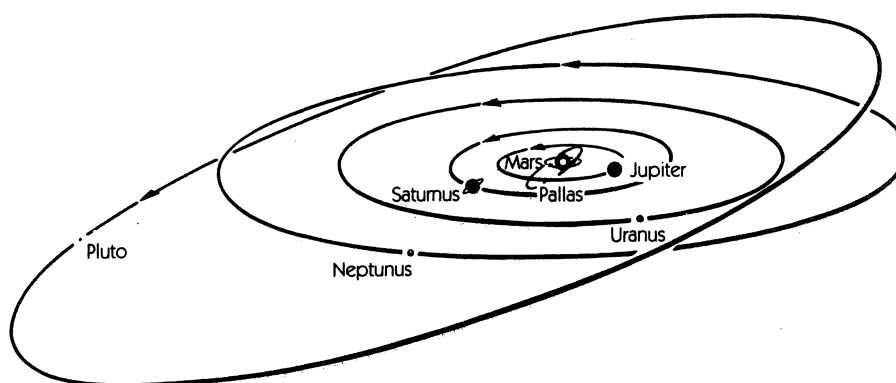
Om inzicht in zijn werk te krijgen beginnen we met een klassiek probleem.

Als twee lichamen elkaar volgens de zwaartekrachtwet van Newton aantrekken, zoals bijvoorbeeld de Zon en de Aarde, dan kunnen de vergelijkingen die de bewegingen van die lichamen beschrijven, eenvoudig worden opgelost. Dat wil zeggen dat men uit die vergelijkingen *formules* kan afleiden waarmee men bij een gegeven beginpositie en beginsnelheid direct de positie en de snelheid op elk ander tijdstip kan vinden. Die bewegingen van twee lichamen blijken heel regelmatig te zijn: ten opzichte van het gemeenschappelijke zwaartepunt zijn de banen altijd ellipsen, parabolen of hyperbolen. In het geval van de Zon

en een planeet mogen we aannemen dat het gemeenschappelijke zwaartepunt met de Zon samenvalt omdat de massa's van de planeten veel en veel kleiner zijn dan die van de Zon. De uitkomst is dan dat elke planeet ten opzichte van de Zon een ellipsbaan beschrijft; de hiervoor benodigde afleidingen zijn al in het werk van Newton te vinden.

Deze resultaten beantwoorden bijna aan het klassieke ideaal: in het Newtonse tweelichamenprobleem beschrijven de massa's kegelsneden, zeer regelmatige figuren, zoals het ook hoort voor hemellichamen. Het is maar een stapje weg van het echte klassieke ideaal, de beweging volgens cirkels die past bij een harmonische bouw van de wereld. Zoals Simplicius van Cilicia, een late leerling van Plato in de zesde eeuw na Chr., het zegt:

‘Plato heeft het principe vastgelegd dat de beweging van de hemellichamen volgens cirkels is, uniform and altijd regelmatig.’



FIGUUR 1. Het zonnestelsel met de buitenste planeten; binnen de Marsbaan bevinden zich de planeten Aarde, Venus en Mercurius. Behalve de aarde zijn er nog 6 planeten met manen. Verder zijn er grote zwermen asteroïden, kometen, meteoren en kleinere deeltjes. De asteroïde Pallas is in de figuur aangegeven; deze beweegt zich tussen de Mars- en de Jupiterbaan en heeft een diameter van circa 500 km.

Johannes Kepler (1571–1630) echter concludeerde uit zijn studie van de baan van de planeet Mars dat zijn beweging volgens een ellips moest plaatsvinden. Nog erg regelmatig, maar toch door waarde te hechten aan empirische gegevens een eerste verandering van inzicht. Galileo Galilei (1564–1642) bijvoorbeeld, geloofde niets van de door Kepler voorspelde beweging in ellipsbanen. Hij hield

wat dit betreft geheel vast aan het klassieke ideaal van beweging in cirkelbanen; zie bijvoorbeeld [8].

Een beschrijving van het zonnestelsel op basis van los van elkaar staande tweelichamenproblemen is veel te eenvoudig. Dat zou immers inhouden dat elke planeet alleen door de Zon wordt aangetrokken, maar ze trekken elkaar natuurlijk ook onderling aan, zij het met veel kleinere krachten. Ook dat was al in de achttiende eeuw bekend; zo kon rond 1750 de langgerekte baan van de komeet Halley om de Zon alleen nauwkeurig genoeg voorspeld worden als de invloeden van Jupiter en Saturnus meegerekend werden.

De eenvoudigste uitbreiding van het model van twee lichamen is dat van drie lichamen die elkaar volgens Newtons zwaartekrachtwet aantrekken; het stelsel Zon en de grote planeten Jupiter en Saturnus, maar ook het stelsel Zon, Aarde, Maan zijn daar een goed voorbeeld van. Dat laatste probleem was in de achttiende eeuw ook van praktisch belang omdat de beweging van de Maan gebruikt werd voor de positiebepaling op zee. Tijdens zijn beweging aan de hemel bedekt de maan verschillende sterren; welke dit zijn, hangt echter af van de positie die een waarnemer op Aarde inneemt. Precieze voorspellingen over de maanbaan kunnen de zeeman dus helpen zijn positie op zee te bepalen.

DE STABILITEIT VAN HET ZONNESTELSEL

De oplossing van het bewegingsprobleem van drie of meer lichamen hangt ook samen met de vraag of het zonnestelsel stabiel is. Met dat probleem hield de Franse wiskundige Laplace (1749–1827) zich bezig. In zijn ‘*Traité de Mécanique Céleste*’ [9] geeft Laplace een volledig deterministische behandeling van het zonnestelsel, gebaseerd op de wetten van Newton. Napoleon miste in dit werk een verwijzing naar de Goddelijke invloed. Zeer bekend is Laplace’s zelfbewuste antwoord toen zijn gelovige keizer hem met dit gemis confronteerde: ‘Sire, ik had deze hypothese niet nodig’.

Het werk van Laplace is buitengewoon vruchtbaar geweest door de methoden die hij ontwikkeld heeft. Het probleem van de stabiliteit van het zonnestelsel werd door hem niet opgelost. Het is nog steeds niet opgelost.

De deterministische beschrijving van het zonnestelsel, door oplossing van de differentiaalvergelijkingen van Newton, roept direct de vraag op of de beweging ervan die we al duizenden jaren waarnemen en waarbij alle banen zich ongeveer periodiek herhalen, wel altijd zo door zal blijven gaan. Blijft de reeks van zons- en maansverduisteringen, van conjuncties van planeten, enzovoorts, altijd ongewijzigd? Wat zou er mis kunnen gaan? Is het uitgesloten dat sommige planeten met elkaar in botsing komen, of dat ze het zonnestelsel helemaal verlaten? Of bijvoorbeeld dat een maan van de ene planeet wordt ingevangen door een andere planeet? We kunnen met berekeningen aantonen dat het onze tijd wel zal duren, maar daar gaat het hier niet om. De vraag is of deze nagenoeg periodieke dynamica het tot in alle eeuwigheid uit zal houden. Dit is de grote vraag naar de stabiliteit van het zonnestelsel.

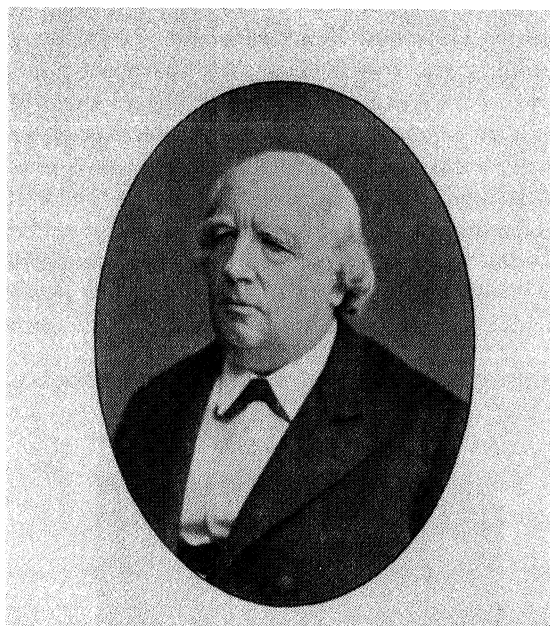


FIGUUR 2. Laplace

DE PRIJSVRAAG VAN KONING OSCAR II VAN ZWEDEN

Een van de leidinggevende wiskundigen, Karl Weierstraß (1815–1897), realiseerde zich in de tweede helft van de negentiende eeuw heel goed dat het eigenlijk merkwaardig was dat het drielichamenprobleem nog steeds onopgelost was. Weliswaar kon men in concrete gevallen door numerieke methoden de banen van de lichamen voor een beperkt tijdsbestek berekenen, maar men was er nooit in geslaagd algemene formules voor de baankrommen te vinden waarmee plaats en snelheid op een willekeurig tijdstip voorspeld konden worden. In tegenstelling tot het tweelichamenprobleem bleek deze opgave buitengewoon moeilijk te zijn; de grootste geleerden hadden er hun tanden op stukgebeten.

In dit verband deden curieuze verhalen de ronde. De prominente wiskundige Lejeune Dirichlet (1805–1859), werkzaam aan de universiteit van Göttingen, hield zich bezig met differentiaalvergelijkingen en ook met de vergelijkingen van de hemelmechanica. In 1858 vertelde hij aan de wiskundige Leopold Kronecker



FIGUUR 3. Karl Weierstraß

(1823–1891), dat hij kon bewijzen dat het zonnestelsel stabiel was. Kort daarna overleed Dirichlet en men kon in zijn nagelaten papieren dit bewijs niet vinden. Bij een minder belangrijk man dan Dirichlet zou dat reden zijn geweest om zijn claim af te wijzen. In dit geval bleef men twijfelen.

Dat inspireerde Weierstraß in 1887 tot het formuleren van een opgave voor de prijsvraag die door koning Oscar II van Zweden werd uitgeschreven. In 1889 werd het essay van Henri Poincaré (1854–1912) bekroond, waarbij Weierstraß aantekende dat het drielichamenprobleem in zijn algemeenheid nog steeds niet opgelost was, maar dat Poincaré's resultaten zonder overdrijving baanbrekend konden worden genoemd, en dat hij de prijs dus toch ten volle verdiende. De vele verwickelingen rond deze prijsvraag zijn beschreven in [4] en uitvoeriger in [3] en [2].

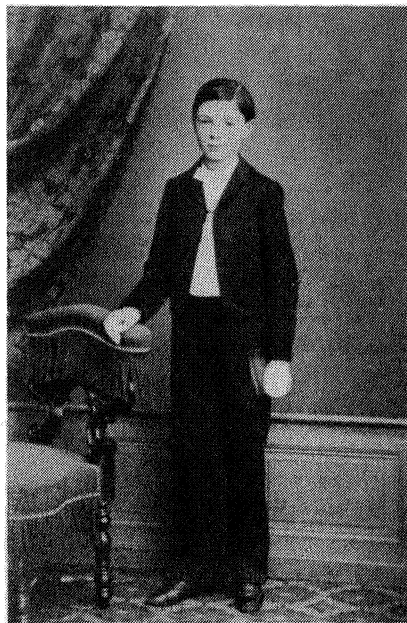
Poincaré's antwoord betekende een breuk met de klassieke methoden waarbij min of meer expliciete oplossingen worden afgeleid in de vorm van wiskundige formules. Het maakt deel uit van zijn werk in de nietlineaire differentiaalvergelijkingen en de dynamica; we zullen dit bespreken in paragraaf 3.

Eerst volgt een schets van Poincaré's levensloop.

2. LEVENSLLOOP

Jules-Henri Poincaré – hij werd Henri genoemd – werd op 29 april 1854 te Nancy geboren. Zijn vader was medicus, hij was naast zijn praktijk aan de Faculteit van Nancy verbonden. De familie Poincaré telde van beide kanten vele professioneel opgeleide mensen; zijn grootvader van vaderszijde was apotheker, verschillende ooms waren ingenieur en de uiteenlopende verhalen van deze familieleden schijnen tot de verbeelding van de jonge Henri te hebben gesproken. Zijn talenten waren al vroeg duidelijk, zowel op het gebied van de exacte vakken als dat van de letteren. Zo schreef hij op dertienjarige leeftijd een drama in vijf bedrijven over Jean d'Arc. Na enkele jaren Lycée was zijn keuze echter bepaald; zijn wiskundeleraar schreef in 1872 aan een vriend:

‘J’ai dans ma classe à Nancy, un monstre de mathématiques, c’est Henri Poincaré.’



FIGUUR 4. Henri op de dag van zijn eerste Communie

Hij ging studeren aan de École polytechnique (1873–1875), maar vervolgde dit niet met een militaire carrière maar met de ingenieursopleiding aan de École nationale supérieure des Mines (1875–1879). Vanaf het begin van zijn studie als ingenieur – op eenentwintigjarige leeftijd – hield Henri Poincaré zich naast zijn studie bezig met het oplossen van differentiaalvergelijkingen. In het jaar van zijn afstuderen, 1879, promoveerde hij tot doctor in de wiskunde aan

de universiteit van Parijs. Zijn promotor, de fameuze meetkundige Gaston Darboux, stelde iets vast dat typerend is voor Poincaré's stijl van werken:

‘Het leek mij meteen duidelijk dat Poincaré's dissertatie boven de gewone standaard uitging en ten volle verdiende geaccepteerd te worden. Hij bevatte beslist genoeg resultaten om materiaal te leveren voor verscheidene goede dissertaties. Maar om een precies idee te geven van de manier waarop Poincaré werkte moet zonder aarzeling gezegd worden dat op veel punten correctie en uitleg nodig waren. De correcties en verbeteringen die ik nodig achtte voerde hij bereidwillig uit. Maar toen ik hem vroeg dit te doen, legde hij me uit dat hij rondliep met vele andere ideeën; hij was toen al bezig met enkele van de grote problemen die hij voor ons zou oplossen.’

Poincaré's stijl en manier van werken was intuïtief. Hij liep te peinzen over allerlei zeer moeilijke vragen en als hij een oplossing zag schreef hij deze haastig op zonder zich te bekommeren om de nodige tussenstappen, laat staan om punten en komma's. Dat blijft zijn hele leven zo, hetgeen ook blijkt uit een correspondentie met L.E.J. Brouwer in 1911, zie [5]. Uit deze briefwisseling blijkt overigens nog iets anders, namelijk dat Poincaré tot in zijn laatste levensjaar zich moeilijke nieuwe theorieën eigen maakte, in dit geval het fundamentele topologische werk van Brouwer.

Het rechtstrijken van oneffenheden liet hij aan anderen over. Het werk van Poincaré bevat veel plekken die nader ingevuld moeten worden, het bevat echter weinig foute conclusies en toont een geniale visie op veel moeilijke problemen.

Van 1879 tot 1881 geeft hij onderwijs in de mathematische analyse aan de universiteit van Caen, van 1881 tot 1885 in Parijs.

In 1889 wint hij de prijsvraag die door Oskar II van Zweden werd uitgeschreven; veel eredoctoraten en andere eerbewijzen vallen hem ten deel. In 1908 wordt hij lid van de Académie Française.

Zijn loopbaan blijft zich aan de Parijse universiteit afspelen, maar vertoont een gevarieerdheid die zijn zeer brede belangstelling weerspiegelt. Zo doceert hij afwisselend fysieke en experimentele mechanica, mathematische fysica en waarschijnlijkheidsleer, hemelmechanica, algemene sterrenkunde, om maar enkele voorbeelden te noemen. Bij zijn overlijden op 17 juli 1912, is hij hoogleraar theoretische electriciteitsleer aan de École professionnelle supérieure des Postes et Télégraphes.

Voor hem geldt wat Pieter Rabus schrijft, zie [7], bij de uitgave van zijn vertaling uit het Latijn van Christiaan Huygens' *Cosmotheoros* welke posthuum verscheen:

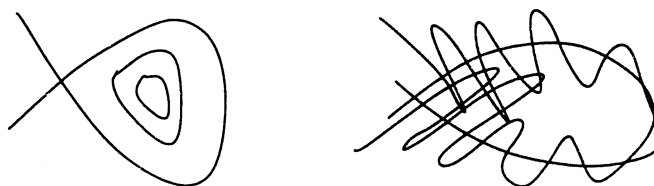
‘Jammer is 't, voorwaar, dat zulke vernuften zoolang niet mogen leven, als men beschreven vind, dat sommigen der Aartsvaders gebeurt is.’



FIGUUR 5. Henri met zijn verloofde, later zijn echtgenote

3. VAN HEMELMECHANICA TOT NIETLINEAIRE DYNAMICA

Onze inleiding suggereert een beetje dat de bewegingsleer van de hemellichamen het centrale onderwerp van Poincaré's werk was. Die opvatting doet geen recht aan de breedheid van zijn werk. Wel was het een onderwerp waarmee hij in het begin van zijn loopbaan veel eer in legde, hij behaalde er grensverleggende resultaten en het hield altijd zijn belangstelling.



FIGUUR 6. a. Klassieke 'ingevangen' situatie; b. Homocliene wirwar

Het verrassende in Poincaré's prijswinnende essay was dat hij met nieuwe,

meetkundige methoden kon bewijzen dat er in het drielichamenprobleem niet genoeg *behoudswetten* (zoals de energie van het stelsel) zijn om de oplossingen goed vast te kunnen leggen. Bij de aanwezigheid van voldoende behoudswetten liggen de oplossingen als het ware gevangen op een soort gekromde oppervlakken, voor elke behoudswet één, die elkaar in een hogerdimensionale ruimte doorsnijden. De gemeenschappelijke doorsnede van die oppervlakken is dan de gezochte oplossing. Maar in het drielichamenprobleem zijn er niet genoeg behoudswetten: de oplossingen kunnen niet op genoeg oppervlakken 'ingevangen' worden, en daardoor kunnen ze zich wild en grillig gedragen (homocliene wirwar). De gebruikelijke constructiemethoden die tot nette expliciete formules leiden falen dus.

Poincaré zelf, zie [12] deel 3, hoofdstuk 33, beschrijft dat grillige gedrag van de banen heel beeldend:

‘een soort traliewerk, een door elkaar gevlochten weefsel, een stelsel van mazen dat oneindig dicht in elkaar gegroeid is...

Men zal getroffen zijn door de complexiteit van dit plaatje dat ik zelfs niet probeer te schetsen.’

De voorspelbaarheid en dus de beheersbaarheid van zulke grillige, chaotische oplossingen is gering. Ondanks het deterministische karakter van de wiskundige beschrijving, laat de toekomstige ontwikkeling zich op langere termijn nauwelijks voorspellen. Dat ziet er dus niet best uit voor het stabiliteitsprobleem van het zonnestelsel, waarbij de inzet nu juist de voorspelbaarheid tot in alle eeuwigheid was! In de jaren 1892–1899 vatte Poincaré zijn resultaten samen in drie boeken, de ‘Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste’, [12]. Ze zijn, door de combinatie van kwalitatieve en kwantitatieve methoden, nog altijd het bestuderen waard. We bespreken een aantal onderwerpen uit dit werk.

In het eerste deel wordt de methode van Cauchy voor reeksontwikkeling van de oplossingen van differentiaalvergelijkingen uitgebreid voor vergelijkingen die van een (kleine) parameter afhangen. De voor de hand liggende toepassing is het drielichamenprobleem waarbij één van de massa's klein is, maar de formulering door Poincaré is heel algemeen. Hij leidt dan vervolgens de kleine-parametermethode af voor periodieke oplossingen. In deel 2 komt hij hier uitvoerig op terug, waarbij hij wijst op formele berekeningen van Lindstedt – deze methode van periodieke oplossingen bepalen wordt meestal de Poincaré-Lindstedt methode genoemd – en de verwante methode van Bohlin. Tegenwoordig spreken wij van toepassing van de impliciete functiestelling en continuering, zonder hiermee overigens veel nieuws aan Poincaré's werk toe te voegen.

In deel 1 vindt men ook een behandeling van de rol van karakteristieke exponenten, bepaald door een eigenwaardenberekening in de omgeving van een speciale oplossing, meestal een evenwichts- of periodieke oplossing. In de literatuur is met de theorie van karakteristieke exponenten ook de naam van de Rus Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857–1918) verbonden.

Tenslotte wordt in dit deel ingegaan op het bestaan van uniforme integralen in dynamische systemen van de mechanica. Deze beschouwingen speelden

al een rol in zijn beantwoording van de prijsvraag van Oskar II, waarin Poincaré aantoonde dat het drielichamen probleem niet genoeg integralen heeft om regelmatig gedrag van de oplossingen te garanderen.

In het tweede deel begint hij met een speelse gedachte: beschouw eens twee reeksen met respectievelijk algemene termen

$$\frac{1000^n}{n!} \quad \text{en} \quad \frac{n!}{1000^n}$$

De wiskundige, zo stelt Poincaré, zal zeggen dat de eerste reeks convergeert en de tweede reeks divergeert. De astronoom zal menen dat de eerste reeks wel heel erg hard oploopt en dus divergent is, terwijl de tweede reeks zich honderden termen lang ‘nogal convergent gedraagt’ en dus goed te gebruiken is. Zijn opmerkelijke conclusie is dat beiden gelijk hebben. De eerste reeks is convergent, de tweede divergent, maar de tweede reeks kan dienen tot asymptotische benadering. Hij definieert vervolgens het begrip asymptotische reeks en past dit in zijn werk vele malen toe. Een deel van de ontwikkelingen van oplossingen van een differentiaalvergelijking naar een kleine parameter blijkt convergent te zijn, een deel is asymptotisch in deze zin.

In dit deel keert hij terug tot de methode van bepaling van periodieke oplossingen, geeft vele toepassingen en gaat in op het verschijnsel nietlineaire resonantie dat hier voor moeilijkheden kan zorgen. Zowel lineaire als nietlineaire vergelijkingen komen aan de orde.

In het derde deel bespreekt hij opnieuw integraalinvarianten. Verder wordt de bekende recurrentiestelling geformuleerd en bewezen (hoofdstuk 26): in een conservatief systeem keert het systeem oneindig vaak en zo dichtbij als men wil bij de begintoestand terug. In dit deel worden dan nog fundamentele begrippen als ‘conséquent’ (tegenwoordig Poincaré-afbeelding), invariante verzameling, homocliene en heterocliene oplossingen ingevoerd. Bij dit laatste behoort ook het boven gegeven citaat over homocliene wirwar.

Tenslotte vindt men hier een uitvoerige discussie van het begrip ‘solution périodique du deuxième genre’, hetgeen correspondeert met wat we nu Hopf-bifurcatie noemen.

Het is niet overdreven te stellen dat de gehele moderne nietlineaire analyse van dynamische systemen en topologische dynamica door Poincaré hier is opgezet en van een grondige uitwerking is voorzien. Een passender titel voor deze drie boeken zou tegenwoordig zijn ‘Nieuwe methoden van de nietlineaire dynamica’. De praktische toepassingen voor de hemelmechanica zelf heeft Poincaré samengevat in drie andere boeken [13].

Het is heel merkwaardig dat deze resultaten, op een paar uitzonderingen na, pas in de jaren zestig door de gemeenschap van onderzoekers in de toegepaste wiskunde opgepakt zijn. Sporen van onbegrip zijn zelfs nog in de recente vakliteratuur aanwezig, getuige bijvoorbeeld de toonaangevende classificatie-index van de ‘Mathematical Reviews’. In de meest recente versie, die van 1991, lezen we als ‘titel van de rubriek 58F13: ‘Strange attractors, chaos and other pathologies’. Chaos wordt daar dus nog altijd als een ‘pathologie’ gezien.



FIGUUR 7. Poincaré op latere leeftijd

4. VELE ANDERE WISKUNDIGE ACTIVITEITEN

Het is niet doenlijk om in een artikel een overzicht te geven dat recht doet aan Poincaré's creativiteit en veelzijdigheid in de wiskunde. Zijn bibliografie, zie bijvoorbeeld [5] en [10], bevat behalve het onderwerp differentiaalvergelijkingen, de theorie van complexe functies, algebra en arithmetica, meetkunde, topologie, analytische mechanica, hydrodynamica, hemelmechanica, geodesie en mathematische fysica. Door Volterra, Hadamard, Langevin en Boutroux is in 1914 een goed leesbare appreciatie [1] van zijn werk gegeven. De twee delen 'The mathematical heritage of Henri Poincaré' [5] geven in 1980 een beeld van zijn invloed.

Als voorbeeld bespreken we kort zijn werk in de meetkunde en topologie. In

het begin van zijn carrière hield hij zich bezig met de consistentie van de niet-Euclidische meetkunde, hetgeen door zijn werk en dat van Felix Klein tot een bevredigende staat kwam. Veelal was Poincaré's motivatie voor het ontwikkelen van topologische theorieën het begrijpen van problemen uit de theorie van complexe functies (verband met het werk van Riemann) en dynamische systemen. Hierbij behoort onder anderen de theorie van automorfe functies en het uniformiseren.

Daarnaast ontstond bij hem grote belangstelling voor de topologie zelf. Van hem is het begrip 'homologie' afkomstig, tevens homologie- en cohomologiegroepen. Verder begon hij de analyse van singulariteiten en voerde hij het begrip 'index' van een vektorveld in. Dit laatste heeft weer veel toepassingen in de theorie van de differentiaalvergelijkingen, met name dat van de periodieke oplossingen. Dat geldt ook voor de door Poincaré ontwikkelde dekpuntstellingen. Zijn analyse van afbeeldingen, vooral maatbehoudende, is een voorbeeld van theorie die zowel zuiver wiskundig interessant is als voor de toepassingen van waarde is gebleken.

5. FILOSOFISCH WERK

De belangstelling die Henri Poincaré op het Lycée toonde voor de letteren en de begaafdheid die hij op dit gebied had, hebben doorgewerkt in zijn later leven. Hij gaf voordrachten over filosofische onderwerpen en onderwijskwesties, hij schreef regelmatig in de *Revue de Métaphysique et de Morale*; een deel hiervan is in zijn verzameld werk terug te vinden. Zijn voornaamste werk in de filosofie is gebundeld in vier boeken [15] die nog steeds interessant zijn om te lezen.

In de discussies die hij aanging met Couturat, Leroy, Lalande en buiten Frankrijk met Bertrand Russell, was hij niet erg geïnteresseerd in het al of niet juist zijn van uitspraken binnen een filosofisch systeem. Hij nam de uitspraken van auteurs in hun precieze vorm en confronteerde deze vervolgens met de feiten. Dat leidde dan meestal tot moeilijkheden en tegenspraken die hem stimuleerden tot nadenken.

Een van de onderwerpen waarmee Poincaré zich uitvoerig bezig hield waren de grondslagen van de Euclidische en niet-Euclidische meetkunde. Verder schreef hij over onderwerpen als het continuüm in de fysische werkelijkheid, relativiteitstheorie, logica, toeval en vele andere. Een Nederlandse dissertatie [11] over zijn filosofisch werk verscheen in 1966. Als voorbeeld gaan we in op hoofdstuk 3 over 'wiskundige uitvinding' in *Science et Méthode* [15]. Terzijde merken we op dat er een langdurige en onbesliste strijd bestaat over de vraag of wiskundige concepten en stellingen 'uitvindingen' of 'ontdekkingen' zijn, met andere woorden of het menselijke bedenkensels zijn of al bestaande dingen. Dat laatste zou in overeenstemming zijn met de Platonische opvatting van de werkelijkheid. Het is in dit verband interessant dat de Engelse vertaling van *Science et Méthode* het Franse 'invention' (fout) vertaalt met 'discovery'; wellicht is deze vertaling een positie kiezen in de vermelde discussie, maar dan wel ten koste van de tekst van Poincaré. Poincaré begint met op te merken dat het

niet duidelijk is hoe de menselijke geest tot nieuwe ideeën, in het bijzonder tot nieuwe wiskundige ideeën komt. Echter, er is nog een kwestie die hieraan vooraf gaat. Het is niet verbazingwekkend dat er mensen zijn die geen wiskundige uitvindingen doen, maar hoe kan het dat de meeste mensen niet in staat zijn een wiskundige redenering te volgen? Die redeneringen zijn toch immers gebaseerd op algemeen aanvaarde principes van de natuurlijke logica die een ieder, die bij zijn volle verstand is, bezit. Kennelijk is het zo, dat hoewel de wiskundige redenering kan worden uiteen gerafeld in zeer kleine stapjes die iedereen begrijpt, de totale rij van stapjes voor de meeste mensen onbegrijpelijk is. Zou de wiskundige zich onderscheiden door een goed geheugen, dat hem in staat stelt het geheel van stapjes te onthouden? Dat lijkt in strijd te zijn met de feiten. Het is veeleer zo, dat deze lange rij van stapjes die tezamen een bewijs vormt, een zekere ordening heeft die door de wiskundige gezien wordt. De wiskundige heeft een intuïe, een gevoel voor een speciaal soort orde die een wiskundige redenering kenmerkt. Nogmaals, hij behoeft niet een goed geheugen te hebben, maar wel het vermogen om met zijn intuïe een een zekere concentratie geordende rijen van logische stapjeds die naar een speciaal doel voren te overzien.

Stel nu dat iemand deze wiskundige begaafdheid heeft, hoe komt dan uitvinding tot stand? Een vinding komt tot stand door een vruchtbare keuze die men maakt in het combineren van bekende feiten, het zien van analogieën en tot nu toe onbekende verbanden. Dat verplaatst echter het probleem naar de vraag hoe de creatieve wiskundige een ‘vruchtbare keuze’ maakt. In dit verband geeft Poincaré een aantal voorbeelden van situaties waarin hij een vinding deed. We geven er een weer.

In het begin van zijn loopbaan was hij, behalve in de hemelmechanica, bezig met lineaire differentiaalvergelijkingen en in het bijzonder met speciale oplossingen, de Fuchse functies. Deze waren, na de toen bekende elliptische functies, een nieuwe klasse van speciale functies met interessante algebraïsche eigenschappen. In Caen dacht Poincaré over deze problemen na, maar daarnaast hield hij zich, als mijnbouwkundig ingenieur, met heel andere zaken bezig, namelijk geofysisch veldwerk. Hij beschrijft dat hij na hard werken aan deze Fuchse functies slechts povere resultaten had.

‘Op dat moment ging ik weg uit Caen, waar ik toen woonde, om deel te nemen aan een geologische cursus georganiseerd door de École des Mines. De voorvallen van de reis deden me mijn wiskundige werkzaamheden vergeten; toen we in Coutances aankwamen namen we een bus voor de een of andere wandeling; het ogenblik waarop ik mijn voet op de opstaptree zette kreeg ik het idee, zonder dat iets in mijn gedachten daarvoor mij erop leek te hebben voorbereid, dat de transformaties waarvan ik had gebruik gemaakt om de Fuchse functies te definiëren identiek waren aan die van de niet-Euclidische meetkunde. Ik ging niet na of dit juist was; ik zou er de tijd niet voor hebben gehad, want, nauwelijks gezeten in de bus, hervatte ik de conversatie die gaande was,

maar ik was er meteen heel zeker van. Teruggekeerd in Caen heb ik het resultaat geverifieerd om mijn geweten gerust te stellen.’

Poincaré noemt nog enkele voorbeelden en beschrijft dan hoe wiskundig werk vaak toegaat

‘Dikwijls, als men aan een moeilijk probleem werkt, brengt men er de eerste keer niets van terecht; vervolgens neemt men een min of meer lange pauze en zet zich opnieuw aan het werk. Het eerste halve uur vindt men nog steeds niets en dan plotseling komt de beslissende gedachte bij ons op. Men zou kunnen zeggen dat het bewuste werk resultaat heeft afgeworpen omdat het onderbroken is en de rustpoos de geest versterkt en verfrist heeft. Maar het is waarschijnlijker dat deze rustpoos gevuld is geweest met onbewust werken en dat het resultaat van dit werk zich vervolgens aan de wiskundige heeft geopenbaard, precies zoals in de gevallen die ik heb beschreven.’

Men moet bedenken dat rond 1900 het denken over het onbewuste nog niet ver gevorderd was, laat staan dat men een notie had van de resultaten van het hedendaags hersenonderzoek. Eén van zijn conclusies is deze:

‘En dan doet een eerste veronderstelling zich aan ons voor: het onbewuste ik is helemaal niet de mindere van het bewuste ik; het is niet alleen een automaat, het heeft onderscheidingsvermogen, het heeft fijn gevoel, is kieskeurig; het kan kiezen, het kan raden. Wat zeg ik, het kan beter raden dan het bewuste ik want het slaagt waar de ander gestrand is. Samengevat, is het onbewuste ik niet de meerdere van het bewuste ik?’

Deze gedachten over het wiskundige uitvinden heeft Hadamard geïnspireerd tot een studie [6] van deze gedachtenwereld; hij gebruikt hierbij overigens het woord ‘invention’. Een en ander heeft natuurlijk ook gevolgen voor het onderwijs in de wiskunde en het laatste woord is hier nog niet gesproken.

Een laatste citaat waarin observatie van het denkproces leidt tot conclusies over de werking van het onbewuste.

‘De regels van deze berekeningen zijn streng en ingewikkeld; ze eisen discipline, aandacht, wilskracht en, bijgevolg, bewustzijn. In het onbewuste ik regeert daarentegen wat ik de vrijheid zou willen noemen, als men deze naam zou kunnen geven aan de simpele afwezigheid van discipline en aan de wanorde die voortkomt uit het toeval. Alleen, juist deze wanorde maakt onverwachte verbindingen mogelijk.’

In dit verband kan worden opgemerkt, dat in het denken over de menselijke geest modellen van dynamische systemen de laatste jaren een rol zijn gaan spelen, zie [17] en [4]. In deze modellen – metaforen is een betere aanduiding

– worden homocliene wirwar en chaos door vreemde attractie gebruikt om een beeld te scheppen van de werking van het onbewuste.

De filosofische boeken [15] zijn nog steeds verkrijgbaar en de lezer zou zich het genoeg moeten doen om deze te leren kennen.

6. INVLOED EN STAGNATIE

In de periode tussen het overlijden van Poincaré in 1912 en de opbloei na 1960 (zie voor het laatste [4]) is het onderzoek in de dynamische systemen niet erg indrukwekkend geweest. Wiskundigen hadden wellicht andere dingen aan hun hoofd, bijvoorbeeld de vrij algemene tendens om zich steeds meer te verdiepen in abstracties en generalisaties. Dit leidde de aandacht af van de concrete problemen die in de klassieke mechanica te vinden waren. Theoretisch georiënteerde sterrenkundigen en natuurkundigen hielden zich liever bezig met nieuwe, opwindende onderzoeksgebieden zoals de relativiteitstheorie, de quantummechanica, de kosmologie of de deeltjesfysica.

Het werk van Poincaré in de dynamica werd in deze jaren vooral voortgezet door George David Birkhoff (1884–1944), een Amerikaan van Nederlandse afkomst en de eerste grote wiskundige die zijn opleiding geheel in de Verenigde Staten had genoten. Birkhoff publiceerde in 1927 een invloedrijke monografie onder de titel *Dynamical Systems* waarin hij Poincaré's resultaten samenvatte en verder ontwikkelde. Zo bracht zijn studie van Poincaré's 'homocliene wirwar' nieuwe aspecten van de onderliggende structuur aan de oppervlakte. In veel opzichten kan Birkhoff, na Poincaré, beschouwd worden als wegbereider van het latere chaosonderzoek.

Het blijft vreemd dat Poincaré's werk op veel gebieden onmiddellijk is voortgezet, terwijl op het gebied van de dynamische systemen, op een enkele uitzondering na, de zaak heeft stil gestaan. In [16] worden meer praktische redenen genoemd: zo zijn de inzichten en visies van Poincaré voor ons pas *zichtbaar* sinds het bestaan van de mogelijkheid van simulatie en visualisatie op de computer. Dit betekent nu een geweldige stimulans. Verder maakte de toegepaste wiskunde in Frankrijk tussen 1918 en 1950 geen sterke indruk en misschien speelt dus ook kwaliteit van het onderzoek een rol.

Daarnaast vermeldt [16] een dieper liggende mogelijkheid. In de visie van Poincaré verloor de klassieke mechanica zijn beheersbare en voorspelbare karakter. Er bestaan niet genoeg integralen – bewegingswetten – in het drielichamenprobleem waarmee de mogelijkheid van chaotisch gedrag geboren is. Dit is volledig in strijd met het optimistische, moderne wereldbeeld zoals dit vanaf de zeventiende eeuw gangbaar is. De weerstand tegen deze verandering was en is groot.

VERANTWOORDING

De eerste paragraaf, Voorgeschiedenis, is voor een groot deel ontleend aan [4] en [16].

REFERENTIES

- [1] *Henri Poincaré, l'oeuvre scientifique, l'oeuvre philosophique*, par VITO VOLTERRA, JACQUES HADAMARD, PAUL LANGEVIN, PIERRE BOUTROUX, Librairie Félix Alcan, Paris 1914.
- [2] K.G. ANDERSSON, 1994, Poincaré's Discovery of Homoclinic Points. *Archive for History of Exact Sciences* **48**, 133–147.
- [3] J. BARROW-GREEN, 1994, Oscar II's Prize Competition and the Error in Poincaré's Memoir on the Three Body Problem. *Archive for History of Exact Sciences* **48**, 107–131.
- [4] H.W. BROER, J. VAN DE CRAATS, F. VERHULST, 1995, *Het einde van de voorspelbaarheid?* Aramith Uitgevers/ Epsilon Uitgaven.
- [5] F.E. BROWDER (ed.), 1983, The mathematical heritage of Henri Poincaré. *Proceedings Symposia in Pure Mathematics*, AMS, 2 vols.
- [6] JACQUES HADAMARD, 1949, *The psychology of invention in the mathematical field*, Princeton University Press, Dover reprint 1954.
- [7] CHRISTIAAN HUYGENS, 1698, *Cosmotheoros, de wereldbeschouwer*; herdruk Epsilon Uitgaven 1989.
- [8] A. KOESTLER, 1959, *The Sleepwalkers*, Hutchinson, New York.
- [9] S.P. DE LA PLACE, 1799–1825, *Traité de Mécanique Céleste*, Bachelier, Paris.
- [10] ERNEST LEBON, 1912, *Henri Poincaré, biographie, bibliographie analytique des écrits*, Savants du jour, Gauthier-Villars, Paris.
- [11] J.J.A. MOOIJ, 1966, *La philosophie de mathématique de Henri Poincaré* (dissertation Universiteit van Amsterdam), Gauthier-Villars, Paris.
- [12] HENRI POINCARÉ, 1892, 1893, 1899, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, Paris.
- [13] HENRI POINCARÉ, 1907, 1909, 1910, *Leçons de Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, Paris.
- [14] HENRI POINCARÉ, *Oeuvres* (11 delen), Gauthier-Villars 1916–1956, Paris.
- [15] Henri Poincaré, *Bibliothèque de Philosophie scientifique*, Ernest Flammarion, Paris:
Science et hypothèse (1902)
La valeur de la science (1905)
Science et méthode (1908)
Dernières Pensées (1913)
- [16] F. Verhulst, 1990, De historische route naar chaos, in 'De Vlinder van Lorenz' (H. Tennekes, red.), Aramith Uitgevers, Bloemendaal.
- [17] F. Verhulst, 1994, Metaphors for Psychoanalysis, *Nonlinear Science Today*, vol.4, pp. 1–6.



Dynamische Systemen en Bifurcaties

I. Hoveijn

1. DYNAMISCHE SYSTEMEN

1.1. Inleiding

Systemen waarvan de ontwikkeling in de tijd vastligt door een begintoestand te geven noemen we dynamische systemen. Deze worden gebruikt om allerlei verschijnselen te beschrijven in diverse gebieden. We denken hierbij bijvoorbeeld aan het weer, populaties van diersoorten, klokken, spoorwegvoertuigen, maar ook aan de zon met haar planeten, het verloop van chemische reacties of elektronische schakelingen. Ondanks al hun verschillen zijn dit toch voorbeelden van systemen waarvoor wetten bestaan die hun evolutie in de tijd vastleggen.

Ons doel zou nu kunnen zijn om van alle mogelijke begintoestanden de tijdsontwikkeling te leren kennen. Het zal blijken dat dit in het algemeen veel te moeilijk is. Er bestaan echter begintoestanden met heel eenvoudige evolutie, waarbij er in de tijd niets of alleen periodiek iets verandert. Een bijgesteld en meer haalbaar doel zal zijn om kwalitatieve uitspraken te doen over de evolutie van begintoestanden in de buurt van die met een eenvoudige evolutie. Zo'n kwalitatieve beschrijving, liefst op een zo groot mogelijk deel van de toestandsruimte, noemen we de dynamica van het systeem.

Toch is dit nog niet genoeg om meer ingewikkelde, chaotische, dynamica te begrijpen. Daarom kijken we meestal niet alleen naar één individueel systeem, maar naar een hele verzameling, ook wel familie genoemd. Door een parameter van een familie te variëren kunnen we dan een samenhang ontdekken tussen systemen met eenvoudige en systemen met chaotische dynamica. Treedt er bij een waarde van die parameter een kwalitatieve verandering in de dynamica van het systeem op dan spreken we van een bifurcatie. Zo kan in een familie eenvoudige dynamica via één of meer bifurcaties overgaan in chaotische dynamica.

Andersom, in plaats van te vragen naar de dynamica van een gegeven systeem, kunnen we ons afvragen wat we eigenlijk in het algemeen mogen verwachten. We vragen ons anders gezegd af of de dynamica in het systeem waar we naar kijken kwalitatief verandert onder kleine verstoringen van dat systeem: hoe bijzonder is die dynamica. Ook hiervoor is het nuttig om het onderhavige systeem op te nemen in een familie.

Ons programma zal dan ook zijn om in een familie van systemen te kijken hoe de eenvoudigste dynamica, dat wil zeggen begintoestanden met vaste of periodieke evolutie, afhangt van één of meer parameters. Hierbij ontmoeten

we verschillende soorten bifurcaties. Ook nu rijst de vraag: welke bifurcaties mogen we verwachten. We zullen in het bijzonder bifurcaties zien die in het algemeen optreden in 1-parameterfamilies. Aan de hand hiervan kunnen we dan een gedeeltelijk antwoord geven op de vraag welke dynamica we in het algemeen mogen verwachten. Voor uitgebreidere inleidingen tot de dynamische systemen verwijzen we naar Broer, van de Craats & Verhulst [2], Broer & Verhulst [3], en Devaney [4].

1.2. Enkele definities

In het vervolg zullen we het hebben over dynamische systemen waarin de tijd *discreet* is. De wet die de evolutie vastlegt is dan een *afbeelding* die aan een begintoestand van het systeem op het tijdstip $t = 0$ een nieuwe toestand toevoegt op tijdstip $t = 1$ en aan deze weer een andere toestand op $t = 2$, enzovoort. We moeten nog aangeven wat de ruimte van toestanden, voortaan *faseruimte* genoemd, is. In onze voorbeelden zal dit steeds de verzameling van reële getallen \mathbb{R} zijn, of een deelverzameling daarvan. Als formule ziet ons discrete 1-dimensionale dynamische systeem op de faseruimte \mathbb{R} er als volgt uit:

$$x_{n+1} = f(x_n) \text{ met } x_0 \in \mathbb{R} \text{ gegeven.} \quad (1)$$

Hierin beeldt de functie f het beginpunt x_0 af op x_1 en dit vervolgens op x_2 enzovoort. Als we aannemen dat f op geheel \mathbb{R} gedefiniëerd is, hoort er bij iedere x_n precies één x_{n+1} waaruit volgt dat de evolutie van ieder beginpunt inderdaad uniek vast ligt. We spreken voortaan kortweg van de dynamica van de afbeelding f .

Nog wat meer naamgeving. Zoals we al gezien hebben noemen we x_0 het *beginpunt*. De punten $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^{(2)}(x_0), \dots$ noemen we de *baan* van x_0 onder de afbeelding f . Met $f^{(k)}$ bedoelen we de k -de *geïtereerde* van f , dat wil zeggen f is k keer na elkaar toegepast. In het voorgaande is het belang van de “eenvoudigste dynamica” al een paar keer ter sprake gekomen. Hieronder verstaan we vaste en periodieke punten. Een punt x_0 heet *vast*, ook wel een evenwicht, als zijn baan uit slechts één punt bestaat, ofwel als $f(x_0) = x_0$. *Periodieke* punten hebben een baan die uit precies p verschillende punten bestaat: $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$. Periodieke punten zijn dus vaste punten van $f^{(p)}$, maar het omgekeerde hoeft niet het geval te zijn.

Stabiliteit is een belangrijk begrip in de theorie van dynamische systemen en we zullen het in het vervolg ook steeds weer tegenkomen. We definiëren dit nu alleen voor vaste punten, maar uitbreiding voor periodieke punten ligt voor de hand.

DEFINITIE 1 Als f een continu differentieerbare afbeelding is dan noemen we x een stabiel vast punt als $f(x) = x$ en $|f'(x)| < 1$.

Zo'n punt noemen we ook wel een *punt-aantrekker* of een *periodieke aantrekker* in geval van een stabiele periodieke baan. Evenzo spreken we van *afstoters* als de absolute waarde van de afgeleide groter dan 1 is. De verzameling van alle beginpunten waarvan de geïtereerden naar de punt-aantrekker x convergeren noemen we het *aantrekkingsgebied* van x .

OPMERKING. Voor punt- en periodieke aantrekkers (en ook voor afstoters) hebben we nu een kwalitatieve beschrijving van de dynamica op een deel van de faseruimte. In opgave 1 tonen we aan dat er voor een stabiel vast punt x een open omgeving \mathcal{A} van x is zodanig dat de geïtereerden van ieder punt $y \in \mathcal{A}$ naar x convergeren. Per definitie geldt op het aantrekkingsgebied dat alle banen naar de aantrekker gaan. Zo'n gebied kan eenvoudig zijn, zie opgave 3, maar ook bijzonder gecompliceerd, zie [3, Hoofdstuk III]. \square

OPMERKING. Over vaste punten x met $|f'(x)| = 1$ wordt geen uitspraak gedaan. Deze kunnen stabiel of instabiel zijn of zelfs het één noch het ander, zie opgave 2. We zullen later zien dat het optreden van een dergelijk punt een criterium voor een bifurcatie is. \square

OPMERKING. Naast 'eenvoudige dynamica' is er ook 'ingewikkelde dynamica'. In het begin hebben we het al gehad over 'chaotische dynamica' zonder dit te definiëren. Dat zullen we hier ook niet doen. Wel willen we nu opmerken dat het bestaan van oneindig veel instabiele periodieke banen één van de criteria voor het optreden van chaos is. \square

1.3. Enkele voorbeelden

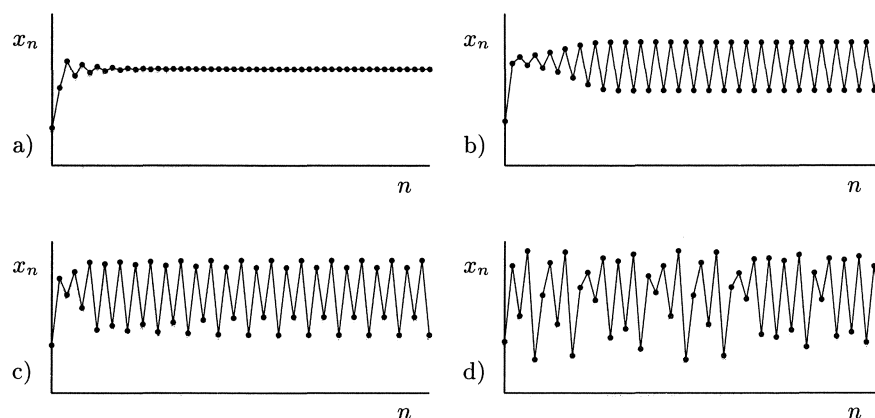
Om het bovenstaande nader te illustreren geven we nu enkele voorbeelden aan de hand van de *logistische afbeelding*, die we in het vervolg nog meermalen zullen tegenkomen. Deze wordt wel gebruikt om bijvoorbeeld de grootte van insectenpopulaties van jaar tot jaar te beschrijven. Zie de bijdrage van J. van de Craats of [2], maar ook het beroemde artikel van [5]. Er valt veel met deze afbeelding te demonsteren en hij speelt dan ook voor wiskundigen een rol die vergelijkbaar is met die van het stekelbaarsje voor ethologen of het fruitvliegje voor genetici. De formule is erg eenvoudig:

$$x_{n+1} = f(x_n) \text{ waarin } f(x) = \lambda x(1 - x) \text{ met } x \in [0, 1] \text{ en } \lambda \in [0, 4]. \quad (2)$$

Het is tot nu toe onmogelijk gebleken om, gegeven x_0 , een uitdrukking te geven voor x_n anders dan de recurrente betrekking in (2). Voor het daadwerkelijk uitrekenen van de baan van x_0 zijn we dus aangewezen op de computer. In figuur 1 geven we daarvan enkele voorbeelden. Langs de horizontale as zetten we n uit en langs de verticale as x_n . Voor $\lambda = 2.75$ zien we dat de baan van x_0 tot een vast punt nadert. Echter voor $\lambda = 3.25$ en $\lambda = 3.5$ nadert de baan van het gekozen beginpunt tot een 2-periodieke, respectievelijk 4-periodieke baan. In de volgende secties zullen we zien dat dit geen losstaande feiten zijn, maar dat de ene situatie uit de andere volgt via een zogenaamde *periode-verdubbelingsbifurcatie*. Om dit in te zien beschouwen we niet de aparte gevallen met $\lambda = 2.75$, $\lambda = 3.25$ enzovoort, maar de *1-parameterfamilie* als één geheel.

Ook het geval $\lambda = 3.75$, waar geen enkele structuur in te ontdekken valt, kan op die manier begrepen worden. Hier heeft namelijk een oneindig aantal periode-verdubbelingsbifurcaties plaatsgehad, waarna de dynamica chaotisch geworden is. Daarmee hebben we weliswaar geen gedetailleerde, maar nog wel kwalitatieve informatie.

Als we de posities van het stabiele vaste punt en de stabiele periodieke punten tegen de parameter λ uitzetten krijgen we het bekende bifurcatiediagram



FIGUUR 1. De baan van $x_0 = 0.1$ voor de logistische afbeelding, met respectievelijk a) $\lambda = 2.75$, b) $\lambda = 3.25$, c) $\lambda = 3.5$ en d) $\lambda = 3.75$. De verbindingsstreepjes hebben geen dynamische betekenis, maar dienen alleen om de opeenvolging der punten duidelijk te maken.

van de logistische familie, zie de bijdrage van J. van de Craats. We zullen hier later nog op terugkomen.

2. BIFURCATIES

Zodra de dynamica van een afbeelding onder variatie van een parameter een kwalitatieve verandering ondergaat, spreken we van een *bifurcatie*. Deze karakterisering is echter te ruim voor wat we nu willen gaan doen, vooral omdat we niet gezegd hebben wat we met een ‘kwalitatieve verandering’ bedoelen. We beperken ons nu tot de eenvoudigste dynamica van een afbeelding en we spreken van een *locale bifurcatie* als bij variatie van één of meer parameters het aantal vaste of periodieke punten verandert, zoals in het voorbeeld van figuur 1. Het zal blijken dat een stabiliteitswisseling, van een vast of periodiek punt, een indicatie is voor het optreden van een locale bifurcatie.

2.1. Singulariteitentheorie en locale bifurcaties

De theorie van locale bifurcaties is een toepassing van singulariteitentheorie. In essentie zegt deze laatste welk (eindig) begin stuk van de Taylorreeks voldoende is om een afbeelding lokaal te beschrijven, wat betreft de dynamica. Er zijn vele andere toepassingen van de singulariteitentheorie, zie bijvoorbeeld [1], maar ook [6] voor bijvoorbeeld toepassingen op het gebied van de geometrische optica. Hier willen we alleen een indruk geven van de singulariteitentheorie voor functies en hoe die gebruikt kan worden voor locale bifurcaties in 1-dimensionale afbeeldingen.

Ons bovengenoemde programma bestaat er uit om eerst de eenvoudigste dynamica te bestuderen afhankelijk van parameters. Dit betekent in het bijzonder dat we willen weten hoe het bestaan en de stabiliteit van vaste en

periodieke punten van die parameters afhangt. Deze punten worden bepaald door de oplossingen van een vergelijking van de vorm:

$$g_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x = 0.$$

Hieruit blijkt dat ons probleem voor vaste en periodieke punten van f vertaald kan worden naar het probleem: hoe hangen de nulpunten van een functie g af van één of meer parameters. De singulariteitentheorie voor oneindig vaak differentieerbare functies geeft daarop een antwoord.

We beginnen met wat naamgeving en conventies. Een oneindig vaak differentieerbare functie noemen we een C^∞ functie. Zo'n functie heeft een Taylorreeks die eventueel niet convergeert. Omgekeerd geldt dat ieder polynoom als beginstuk op kan treden van de Taylorreeks van een C^∞ functie. We zijn nu geïnteresseerd in de nulpunten van zulke functies, eerst nog zonder parameters. Met een translatie zorgen we er voor dat het nulpunt in nul komt te liggen: we bekijken voortaan alleen functies g met een nulpunt in nul. Bovendien bekijken we zo'n functie *locaal*, op een kleine omgeving van nul. Een functie met een nulpunt noemen we een *singulariteit*, het is namelijk zelf een bijzonder punt in de ruimte van functies (behalve voor functies met enkelvoudige nulpunten, zoals we nog zullen zien).

Ons eerste doel is singulariteiten te classificeren en dat doen we door te kijken naar het aantal afgeleiden dat nul is in nul. Een functie met de eerste twee afgeleiden nul is meer singulier dan één met alleen de eerste afgeleide nul. In de ruimte van functies kunnen deze twee willekeurig dicht bij elkaar liggen, bijvoorbeeld x^3 en $\varepsilon x^2 + x^3$, met ε klein. In het algemeen zijn er dicht bij een singulariteit, punten die minder singulier zijn.

Ons volgende doel is dat in kaart te brengen. We willen een singulariteit op een systematische manier verstoren zodanig dat een minder singulier punt ontstaat. Dit wordt het *ontvouwen* van een singulariteit genoemd. Daarvoor zijn parameters nodig en we willen weten hoeveel. Het aantal dat minimaal nodig is heet de *codimensie* van de singulariteit. Voor de classificatie van singulariteiten kijken we niet naar één functie, maar naar een *normaalvorm* die staat voor een heleboel functies tegelijk. We classificeren immers naar het aantal afgeleiden nul en er zijn heel veel functies met bijvoorbeeld $g'(0) = 0$. Deze vormen een equivalentieklasse, met als equivalentierelatie de conjugatie via een inverteerbare coördinatentransformatie die nul vastlaat. Dat wil zeggen dat g en h tot dezelfde equivalentieklasse behoren als er een inverteerbare afbeelding φ is met $\varphi(0) = 0$ en $g \circ \varphi = \varphi \circ h$. Omdat we alleen naar een kleine omgeving van nul kijken hoeft φ slechts lokaal te bestaan, zie ook opgave 4.

Het zal blijken dat we voor de normaalvorm een beginstuk van de Taylorreeks kunnen nemen. Dus van de functies met eerste afgeleide nul begint de Taylorreeks met een term x^2 en die nemen we als normaalvorm. Laten we nu enkele voorbeelden geven die we later, als we het over bifurcaties gaan hebben, ook weer tegen zullen komen.

Het enkelvoudige nulpunt

De eenvoudigste singulariteitenstelling gaat over functies met enkelvoudige nulpunten, dat wil zeggen over functies die nul zijn in nul terwijl hun afgeleide daar niet nul is. Strict genomen zijn dit geen singulariteiten, daar deze functies niet bijzonder zijn in de functieruimte. Toch voeren we ze als zodanig in, vanwege een consistente naamgeving.

STELLING 1 *De normaalvorm van een functie met een enkelvoudig nulpunt is $g(x) = ax$ met $a \neq 0$. De codimensie van deze singulariteit is nul.*

Voor het bewijs van deze stelling is helemaal geen singulariteitentheorie nodig, zie opgave 4. De betekenis van ervan is nu belangrijker. Ten eerste staat er dat de functie lokaal vast ligt door zijn eerste afgeleide, namelijk a . Dit betekent in het bijzonder dat bijvoorbeeld $ax + x^2 - 4x^3$ ook de normaalvorm ax heeft: de hogere orde termen in de Taylorreeks doen er in feite niet meer toe. Ten tweede betekent codimensie nul dat er niets te ontvouwen valt, met andere woorden functies die in de functieruimte dicht bij ax liggen hebben ook een enkelvoudig nulpunt. Nog anders gezegd betekent dit dat een enkelvoudig nulpunt zich niet weg laat storen met een kleine verstoring. Op dezelfde manier is het in te zien dat functies dicht bij een functie die *geen* nulpunt heeft, ook allemaal geen nulpunt hebben.

OPMERKING. Uit de ongevoeligheid voor kleine verstoringen van enkelvoudige nulpunten volgt dat vaste punten en periodieke punten van afbeeldingen met $|f'(x_0)| \neq 1$ respectievelijk $f^{(p)'}(x_0) \neq 1$, ook ongevoelig zijn. Dus de dynamica in een omgeving van zulke punten is kwalitatief niet gevoelig voor kleine verstoringen. \square

Het dubbele nulpunt

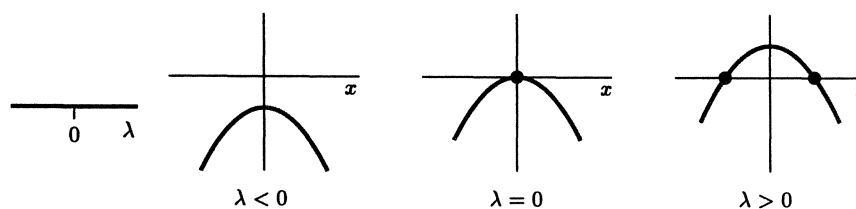
Heeft een functie een nulpunt en is bovendien de eerste afgeleide nul, dan bepaalt de tweede afgeleide of er sprake is van een minimum of een maximum. Dit is het geval $a = 0$ in het bovenstaande en we zien al haast een hiërarchie in singulariteiten ontstaan. De volgende stelling handelt dan ook over functies met dubbele nulpunten.

STELLING 2 *De normaalvorm van een functie met een dubbel nulpunt is $g(x) = bx^2$ met $b = \pm 1$. De codimensie is één en de ontvouwing wordt gegeven door $g_\lambda(x) = \lambda + bx^2$ met $\lambda \in \mathbb{R}$.*

OPMERKING. De tweede afgeleide van een functie met een dubbel nulpunt is niet nul, anders zou er minstens sprake zijn van een drievoudig nulpunt. Dit betekent dat de coëfficiënt b niet nul is. Met een lineaire coördinatentransformatie kunnen we er altijd voor zorgen dat $b = 1$ in de normaalvorm. Soms is het echter handiger om deze transformatie zo te kiezen dat $b = -1$. \square

We geven geen bewijs, maar concentreren ons op de betekenis. Analoog aan het vorige geval, wordt het locale gedrag van een functie met een dubbel nulpunt geheel bepaald door de tweede afgeleide. Termen met graad groter dan twee hebben daar geen invloed op. Wat nu anders is, is dat zo'n functie wel gevoelig

is voor verstoringen. Laten we $b = -1$ kiezen. Dan heeft g voor iedere positieve waarde van λ twee enkelvoudige nulpunten, maar voor iedere negatieve waarde helemaal geen nulpunten, zie figuur 2. Dat de codimensie één is kunnen we hier helaas niet in detail uitleggen. Het betekent dat voor iedere functie h die dicht bij g ligt geldt dat h geconjugeerd is met g_λ voor een zekere waarde van λ . Dat wil zeggen dat h voor die waarde van λ als normaalvorm g_λ heeft.



FIGUUR 2. Parameterlijn met bijbehorende functies uit de familie $g_\lambda(x) = \lambda - x^2$.

Om het idee van ontvouwing meer toe te lichten bekijken we de 1-parameterfamilie g_λ nog eens in de *parameterruimte*. Hierin staat ieder punt voor een functie, of eigenlijk voor een normaalvorm van een functie. In het onderhavige geval is de parameterruimte \mathbb{R} met λ als parameter. Voor $\lambda = 0$ zien we onze singulariteit met codimensie één terug. Deze noemen we de *centrale singulariteit*. Maar voor alle andere waarden van λ zien we alleen singulariteiten met codimensie nul, namelijk functies met hoogstens enkelvoudige nulpunten. In het volgende en laatste voorbeeld komt één en ander wellicht nog duidelijker naar voren.

Het drievoudige nulpunt

Het zal de lezer niet verbazen dat het volgende geval functies met een drievoudig nulpunt betreft. Deze worden geheel bepaald door hun derde afgeleide, daar de eerste twee nul zijn.

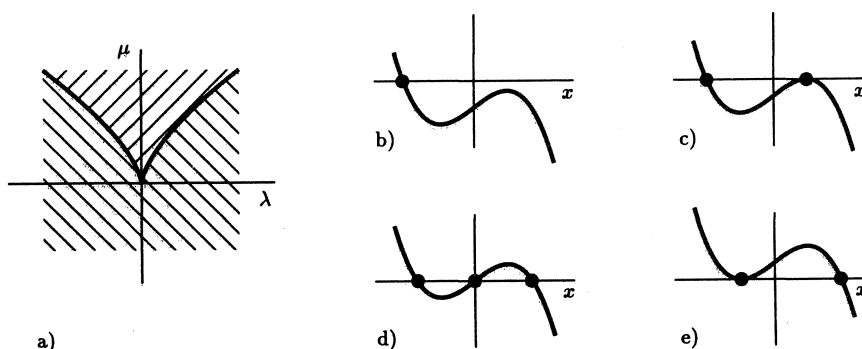
STELLING 3 *De normaalvorm van een functie met een drievoudig nulpunt is $g(x) = cx^3$ met $c = \pm 1$. De codimensie is twee en de ontvouwing wordt gegeven door $g_{\lambda,\mu}(x) = \lambda + \mu x + cx^3$ met $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

OPMERKING. Zoals voor functies met een dubbel nulpunt geldt dat de tweede afgeleide niet nul is, geldt voor functies met een drievoudig nulpunt dat de derde afgeleide niet nul is. Dit betekent hier dat $c \neq 0$. Met een lineaire coördinatentransformatie kunnen we nu echter alleen bereiken dat $|c| = 1$. Het teken van c bepaalt twee verschillende gevallen. \square

Ook nu geven we weer geen bewijs. Laten we daarentegen direct in de parameterruimte gaan kijken. Deze is nu twee dimensionaal met λ en μ als parameters. Ieder punt in dit vlak staat voor een normaalvorm van een equivalentie klasse van functies. In de oorsprong vinden we onze functie met het drievoudige nulpunt terug, de centrale singulariteit. Alle andere punten in het vlak zijn

singulariteiten met een codimensie lager dan twee. De meeste hebben zelfs codimensie nul. In het parametervlak liggen echter twee krommen, waarop ieder punt een singulariteit met codimensie één is, die in de oorsprong bij elkaar komen. Hierbij horen precies de functies met een dubbel nulpunt uit de het vorige voorbeeld.

Wat we nu bereikt hebben is het volgende. Het blijkt dat er in de 2-parameterfamilie $g_{\lambda,\mu}$ slechts vier wezenlijk verschillende soorten functies voorkomen. Het parametervlak valt uiteen in twee gebieden waar de bijbehorende functies één of drie enkelvoudige nulpunten hebben: singulariteiten met codimensie nul. Deze gebieden worden gescheiden door twee krommen waarop de bijbehorende functies dubbele nulpunten hebben: singulariteiten met codimensie één. Als laatste is er dan nog de oorsprong waarbij de functie met het drievoudige nulpunt hoort: de centrale singulariteit met codimensie twee.



FIGUUR 3. Parametervlak met bijbehorende functies uit de familie $g_{\lambda,\mu}(x) = \lambda + \mu x - x^3$. De kromme in a) scheidt gebieden in het parametervlak, vervolgens de grafieken van functies: b) in het onderste gearceerde gebied, c) op de linker tak, d) in het bovenste gearceerde gebied en e) op de rechter tak.

Conclusie

Met deze singulariteiten en hun ontvouwingen gaan we een aantal bifurcaties beschrijven. In de volgende sectie zal het verband gelegd worden tussen de singulariteit ' x^2 ' en de *zadel-knoopp bifurcatie* en ' x^3 ' heeft te maken met zowel de *periode-verdubbelingsbifurcatie* als de *stenvorkbifurcatie*. We gebruiken de al eerder ten tonele gevoerde logistische familie om de betekenis van deze bifurcaties toe te lichten.

We delen bifurcaties in naar de codimensie van de bijbehorende singulariteit. Gegeven nu een familie van afbeeldingen, dan is de vraag, welke bifurcaties mogen we verwachten? Of, in termen van een familie van functies, wat voor nulpunten mogen we verwachten? Nemen we een willekeurige functie met een

nulpunt, dan zal dit in het algemeen een enkelvoudig nulpunt zijn. Pas als we de lineaire term in de Taylorreeks kunnen beïnvloeden mogen we een dubbel nulpunt verwachten. Hieruit volgt dus dat functies met dubbele nulpunten in het algemeen voorkomen in 1-parameterfamilies. Hieruit concluderen we dat hetzelfde geldt voor bijvoorbeeld zadel-knooppbifurcaties, maar stemvorkbifurcaties mogen we blijkbaar pas verwachten in 2-parameterfamilies. We zullen deze uitspraken later nog wat nuanceren.

Laten we nog eens kijken naar het verband tussen nulpunten van functies en vaste punten van 1-dimensionale afbeeldingen. De vaste punten van de afbeelding f worden bepaald door $f(x) = x$ en komen dus precies overeen met de nulpunten van $g(x) = f(x) - x$. We nemen weer aan dat een eventueel singulier punt van g in nul ligt. In het bovenstaande hebben we gezien dat het aantal nulpunten van g kan veranderen, onder variatie van een parameter, als er minstens één afgeleide nul is. Voor f betekent dat, dat moet gelden $f'(0) = 1$. Nog eerder hebben we gezien dat een vast punt stabiel is als $|f'(0)| < 1$ en instabiel als $|f'(0)| > 1$. Bifurcaties en stabiliteitswisseling gaan dus hand in hand.

2.2. Bifurcaties in 1-parameterfamilies

De periode-verdubbelingsbifurcatie

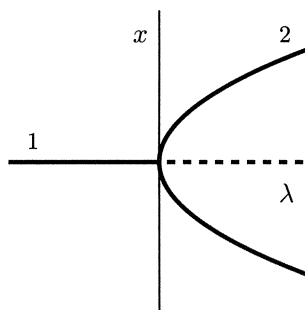
Dit is de meest in het oog springende bifurcatie in het bifurcatiediagram van de logistische familie. Deze komt er oneindig vaak in voor en in zekere zin zelfs ‘oneindig keer oneindig vaak’. De periode-verdubbelingsbifurcatie mogen we in het algemeen verwachten in 1-parameterfamilies van afbeeldingen. Laten we dit precies formuleren in een stelling.

STELLING 4 *De normaalvorm van een afbeelding op een periode-verdubbelingsbifurcatie is $f(x) = -x + cx^3$, waarin $c = \pm 1$. De codimensie is één en de ontvouwing wordt gegeven door $f_\lambda(x) = -(1 + \lambda)x + cx^3$.*

Dit lijkt nog niet op één van de singulariteiten uit het voorgaande. Inderdaad verandert het aantal vaste punten van f hier ook niet omdat $f'(0) = -1$. In het bovenstaande hebben we gezien dat daarvoor minstens moet gelden $f'(0) = 1$. Wel treedt er een stabiliteitswisseling op. Maar wat er nog meer verandert is het aantal vaste punten van $f^{(2)}$, de tweede geïtereerde. Want er geldt wel dat $f^{(2)'}(0) = 1$. Wat er nu gebeurt is het volgende. Voor $\lambda < 0$ is nul een stabiel vast punt. Als $\lambda = 0$ wordt nul instabiel en er ontstaan twee punten die door f op elkaar afgebeeld worden. Deze laatste twee vormen een periodieke baan van f , maar zijn anderzijds vaste punten van $f^{(2)}$. We kunnen ook zeggen dat f een periode-verdubbelingsbifurcatie heeft als $f^{(2)}$ een zogenaamde *stemvorkbifurcatie* heeft. We komen hier nog op terug in de volgende sectie. In opgave 8 wordt het verband tussen periode-verdubbeling en de stemvorkbifurcatie in meer detail uitgelegd.

In een zogenaamd *bifurcatiediagram* geven we dit als volgt weer. Op de horizontale as zetten we de parameter λ uit en op de verticale as de positie van het vaste punt. De bifurcatie zelf vindt plaats in $\lambda = 0$. Om aan te geven of

het om vaste punten van f of van $f^{(2)}$ gaat zetten we bij iedere tak een 1 of een 2. Als een tak uit stabiele vaste punten bestaat geven we dat aan met een getrokken lijn, instabiele takken worden gestippeld. Zie figuur 4.



FIGUUR 4. Het bifurcatiediagram voor de periode-verdubbeling in de familie $f_\lambda(x) = -(1 + \lambda)x - x^3$. De tak met een 1 erbij is het stationaire punt 0 en die met een 2 erbij is de periode twee baan. Punten op de gestippelde tak zijn instabiel, de anderen zijn stabiel.

Voorbeeld: periode-verdubbelingen in de logistische familie

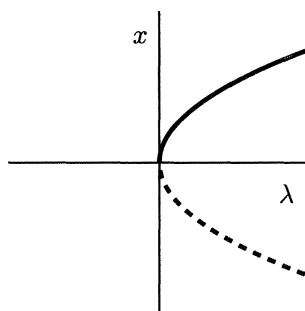
In de logistische familie, zie vergelijking (2), komen zelfs oneindig veel periode-verdubbelingen voor als we de parameter vanaf 1 laten toenemen. Eerst is er een stabiel vast punt en de afgeleide van de afbeelding in dit punt is dalend als functie van λ , zie opgave 3. Bij $\lambda = 3$ is de afgeleide -1 geworden. Hier treedt de eerste verdubbeling op. Er ontstaan twee stabiele vaste punten van $f^{(2)}$ die door f op elkaar afgebeeld worden, een baan met periode twee. Volgen we nu één zo'n vast punt x_0 van $f^{(2)}$ dan is de afgeleide $f^{(2)'}(x_0)$ als functie van λ opnieuw dalend. Bij ontstaan is $f^{(2)'}(x_0) = 1$ maar als λ toeneemt tot ongeveer 3.44 is de afgeleide gedaald tot -1 en treedt opnieuw een periode-verdubbeling op, ditmaal voor $f^{(2)}$. Er ontstaan dus vier punten die door f op elkaar afgebeeld worden, een baan met periode vier. Dit proces herhaalt zich als λ verder toeneemt. De waarden van λ waar verdubbeling optreedt volgen elkaar steeds sneller op en convergeren zelfs naar een waarde $\lambda = \lambda_\infty \approx 3.6$ waar oneindig veel verdubbelingen hebben plaatsgevonden. Tijdens dit proces zijn alle periodieke banen, die voor kleinere λ gevonden waren, blijven bestaan, maar instabiel geworden. Dit laatste, het bestaan van oneindig veel instabiele periodieke banen, is één van de criteria voor het optreden van chaotisch gedrag. Het vergt overigens nog wel enige inspanning om dit alles aan te tonen en dat doen we hier dan ook niet.

De zadel-knoobifurcatie

De zadel-knoobifurcatie hangt direct samen met de singulariteit van het dubbele nulpunt waarbij nulpunten ontstaan of verdwijnen. Hetzelfde gebeurt nu met vaste punten van de afbeelding f .

STELLING 5 *De normaalvorm van een afbeelding op een zadel-knoobifurcatie is $f(x) = x + bx^2$, met $b = \pm 1$. De codimensie is één en de ontvouwing wordt gegeven door $f_\lambda(x) = \lambda + x + bx^2$.*

In het bifurcatiediagram in figuur 5 kunnen we zien wat er gebeurt. Net als bij de singulariteit van het dubbele nulpunt kiezen we $b = -1$. Voor $\lambda < 0$ zijn er geen vaste punten, maar bij $\lambda = 0$ is er één, overeenkomend met het dubbele nulpunt van $g(x) = f(x) - x$. Voor $\lambda > 0$ zijn er twee vaste punten, het ene is stabiel en het andere is instabiel. Opgave 6 gaat over de stabiliteit van beide takken.



FIGUUR 5. Het diagram voor de zadel-knoobifurcatie in de familie $f_\lambda(x) = \lambda + x - x^2$.

Voorbeeld: zadel-knoobifurcaties in de logistische familie

Deze bifurcatie is op het eerste gezicht in de logistische familie niet zo duidelijk aanwezig als de periode-verdubbeling. Toch komen er ook weer oneindig veel zadel-knoobifurcaties voor. Deze is het best zichtbaar bij $\lambda \approx 3.83$, waar voor $f^{(3)}$ zes vaste punten ontstaan. Een stabiel drietal en een instabiel drietal. Immers, als $f^{(3)}$ een vast punt heeft dat geen vast punt is van f , dan zijn er meteen drie die een periodieke baan van f vormen.

Laten we één punt van het stabiele drietal volgen als λ toeneemt. Bij ontstaan is de afgeleide van $f^{(3)}$ in dit vaste punt 1. Ook nu is de afgeleide, als functie van λ dalend. Inderdaad gaat deze voor zekere waarde van λ door -1 en treedt een periode-verdubbeling op. Het hele proces van periode-verdubbelingen zoals we dat gezien hebben voor het vaste punt van f herhaalt zich voor de uit een zadel-knoobifurcatie ontstane baan met periode drie.

Dit geeft al aan dat het bifurcatiediagram van de logistische familie bijzonder ingewikkeld is. Het is namelijk zo dat wat we net geschetst hebben voor de baan met periode drie ook optreedt voor iets kleinere waarden van de parameter voor een baan met periode vijf en zeven, ja voor ieder oneven periode en zelfs nog meer. Dit alles speelt zich af in het parameter gebied $3 < \lambda < 4$.

2.3. Bifurcaties in 2-parameterfamilies

Van de bifurcaties die we pas mogen verwachten in families met twee parameters bespreken we er hier maar één, namelijk de *stenvorkbifurcatie*. Deze hebben we

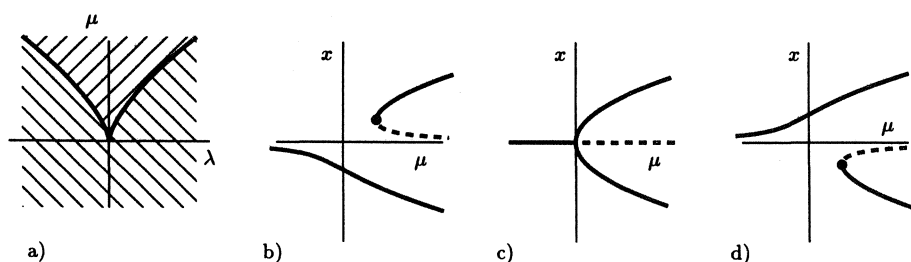
gebruikt om de periode-verdubbelingsbifurcatie te karakteriseren. Aangezien we gezegd hebben dat deze laatste voorkomt in 1-parameterfamilies, moeten we nog uitleggen hoe we dit kunnen doen met een bifurcatie die we niet in zo'n familie mogen verwachten.

De stemvorkbifurcatie

Bij de stemvorkbifurcatie gaat een vast punt over in één, twee of drie vaste punten en de volgende stelling volgt dan ook in direct uit die voor de singulariteit van het drievoudige nulpunt.

STELLING 6 *De normaalvorm van een afbeelding op een stemvorkbifurcatie is $f(x) = x + cx^3$, met $c = \pm 1$. De codimensie is twee en de ontvouwing wordt gegeven door $f_{\lambda,\mu}(x) = \lambda + (1 + \mu)x + cx^3$.*

Het bifurcatiediagram is nu drie dimensionaal, in het horizontale vlak zetten we de parameters λ en μ uit en in de verticale richting de positie van het vaste punt. Het parametervlak is op dezelfde manier ingedeeld als voor de singulariteit van het drievoudige nulpunt, maar de interpretatie is anders. Er is een gebied waar de bijbehorende afbeeldingen één vast punt hebben en een gebied waar zij er drie hebben. Op de krommen die deze twee gebieden scheiden vonden we bij de singulariteit van het drievoudige nulpunt, dubbele nulpunten. Deze corresponderen op hun beurt met zadel-knoobifurcaties zoals we in het voorgaande gezien hebben. De stemvorkbifurcatie zelf vindt plaats in het punt $(\lambda, \mu) = (0, 0)$. Het gehele plaatje bewaren we voor opgave 7, nu geven we drie karakteristieke doorsneden. We nemen drie vaste waarden voor $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ en $\lambda > 0$ en tekenen een bifurcatiediagram waarin alleen μ varieert, zie figuur 6.



FIGUUR 6. Drie karakteristieke doorsneden voor de stemvorkbifurcatie: a) het parametervlak, b) bifurcatiediagram met $\lambda < 0$ vast, c) voor $\lambda = 0$ en d) voor $\lambda > 0$.

Stemvork en periode-verdubbelingsbifurcatie

Vaak wordt het geval $\lambda = 0$ met alleen de parameter μ de stemvork bifurcatie genoemd. Dit is als 1-parameterfamilie echter gevoelig voor verstoringen zoals

we in figuur 6 kunnen zien. Namelijk voor $\lambda = 0$ en voor $\lambda \neq 0$ komen de vaste punten op verschillende manieren bij elkaar. Het wordt echter anders als we eisen dat nul steeds een vast punt is. Dan moet λ wel nul zijn.

Gaan we nu even terug naar de singulariteitentheorie voor functies, dan geldt voor een kleinere verzameling van functies het volgende.

STELLING 7 *Binnen de klasse van functies die altijd nul als nulpunt hebben heeft de singulariteit $h(x) = cx^3$ met $c = \pm 1$, codimensie één. De ontvouwing is dan $h_\mu(x) = \mu x + cx^3$.*

Dit is precies het geval bij de periode-verdubbeling. Dan heeft f immers een vast punt in nul met $f'(0) = -1$. We weten al dat het aantal vaste punten alleen kan veranderen als $f'(0) = 1$. Dit betekent dat als een parameter gevarieerd wordt we een normaalvorm kunnen maken die steeds nul als vast punt heeft. Maar dan moet $f^{(2)}$ ook steeds nul als vast punt hebben als die parameter gevarieerd wordt. Nu geldt echter dat $f^{(2)'}(0) = 1$ zodat het aantal vaste punten van $f^{(2)}$ wel kan veranderen, bij variatie van de parameter. In opgave 8 laten we zien dat de voorwaarde in stelling 4 precies betekent dat $f^{(2)}$ een stemvorkbifurcatie ondergaat en omgekeerd

3. GENERALISATIES

We hebben het tot nu toe alleen gehad over bifurcaties voor 1-dimensionale afbeeldingen en dat zou niet erg zinvol geweest zijn als het niet van belang was voor een veel breder gebied. Daarom willen we in deze laatste sectie een aantal opmerkingen maken over generalisaties van de tot nu toe besproken bifurcaties.

Meerdimensionale afbeeldingen

Zoals we gezien hebben is voor 1-dimensionale afbeeldingen $|f'(0)| = 1$, als nul een vast punt is, een aanwijzing voor het optreden van een bifurcatie. De eerste afgeleide van een afbeelding noemen we ook wel het lineaire gedeelte en het is intuïtief duidelijk dat dit in de buurt van nul overheerst. Inderdaad wordt de stabiliteit van het vaste punt erdoor bepaald als $|f'(0)| \neq 1$. Voor meerdimensionale afbeeldingen is het lineaire gedeelte een matrix, waarvan de eigenwaarden de stabiliteit bepalen. Zijn ze allemaal in absolute waarde kleiner dan 1, dan is nul een stabiel vast punt. Als we nu een parameter in onze afbeelding variëren dan zal er in het algemeen hoogstens één eigenwaarde door 1 of -1 gaan. Er kan nu aangetoond worden dat we dan dezelfde bifurcaties vinden als in 1-dimensionale afbeeldingen.

Beschikken we over twee parameters, dan is het mogelijk om twee eigenwaarden tegelijk door bijvoorbeeld 1 te laten gaan. Dit geeft nieuwe bifurcaties die geen 1-dimensionaal analogon hebben. Om dat uit te zoeken hebben we minstens singulariteitentheorie voor 2-dimensionale afbeeldingen nodig.

We hebben ook gezien dat de klasse van afbeeldingen die we bekijken bepalend is voor de bifurcaties die kunnen optreden. Zo zagen we dat de stemvorkbifurcatie anders wordt als de afbeelding, voor alle parameterwaarden, nul als

vast punt heeft. Hiervoor is meestal een dieper gelegen oorzaak. De belangrijkste is wel symmetrie. Als bijvoorbeeld voor alle λ geldt $f_\lambda(-x) = -f_\lambda(x)$, dan moet nul een vast punt zijn. In één dimensie is het aantal symmetrieën heel beperkt, maar in twee dimensies zijn er al heel wat meer mogelijkheden, zoals spiegel en rotatie symmetrieën. Bifurcaties met symmetrie is dan ook een aparte tak van bifurcatietheorie.

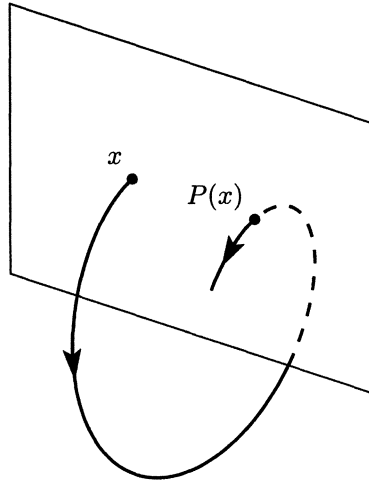
Gewone differentiaalvergelijkingen en afbeeldingen

Naast dynamische systemen met discrete tijd zoals de afbeeldingen waar we het steeds over gehad hebben, zijn er ook met continue tijd. Met als voorbeeld de gewone differentiaalvergelijkingen. Ook hiervoor bestaat een bifurcatie theorie waarin stabiliteit opnieuw een belangrijke rol speelt. De ‘eenvoudigste dynamica’ bestaat nu uit *stationaire punten* en *periodieke oplossingen*. De laatste zijn in de faseruimte gesloten krommen, geparametriseerd met de tijd. De tijd die het duurt om langs de gesloten kromme weer in een beginpunt terug te komen heet hier de *periode*. Nu ondergaan de stationaire punten bifurcaties analoog aan die voor vaste punten van afbeeldingen met ‘ $f'(0) = 1$ ’. Dus in differentiaalvergelijkingen vinden we bifurcaties analoog aan de zadel-knoopen de stemborkbifurcatie die we in de vorige sectie voor afbeeldingen gezien hebben. Het analogon van periode-verdubbeling vinden we alleen voor periodieke oplossingen. In feite ondergaan deze precies dezelfde bifurcaties als vaste punten van afbeeldingen. Dit komt omdat we een verband kunnen leggen tussen differentiaalvergelijkingen en afbeeldingen via de zogenaamde *Poincaré-afbeelding*.

Laten we uitgaan van een differentiaalvergelijking met als faseruimte \mathbb{R}^3 . De oplossingen zijn in de faseruimte met de tijd geparametriseerde krommen. We kiezen nu een vlak dat één van deze krommen transversaal snijdt. Wegens continuïteit snijden naburige krommen dat vlak ook transversaal. De Poincaré-afbeelding wordt nu als volgt gedefiniëerd. Neem zo’n snijpunt in het vlak als beginpunt x en volg dit langs de oplossingskromme totdat het vlak opnieuw gesneden wordt. Dit laatste punt noemen we het beeld $P(x)$ van de Poincaré-afbeelding, zie figuur 7. Het kan natuurlijk gebeuren dat het vlak maar één keer gesneden wordt, dan is $P(x)$ niet gedefiniëerd.

Als de differentiaalvergelijking echter een periodieke oplossing heeft, dan kunnen we het vlak hierop transversaal kiezen. In dat geval heeft P een vast punt en opnieuw wegens continuïteit is het beeld onder P van punten dicht bij dit vaste punt goed gedefiniëerd. Een periodieke oplossing van een differentiaalvergelijking kan dus opgevat worden als een vast punt van de bijbehorende Poincaré-afbeelding. Hieraan zien we dat bifurcaties van periodieke oplossingen van differentiaalvergelijkingen equivalent zijn met die van vaste punten van afbeeldingen in één dimensie lager. In het bijzonder bij de periode-verdubbeling gaat het stabiele vaste punt van de Poincaré-afbeelding over in een stabiele 2-periodieke baan, terwijl de periode van de periodieke oplossing van de differentiaalvergelijking twee keer zo groot wordt.

We kunnen ons nog afvragen wat het nut hier van is als we de periodieke oplossing niet kennen en dus de Poincaré-afbeelding ook niet. Ten eerste heeft

FIGUUR 7. Een Poincaré-afbeelding voor een differentiaalvergelijking in \mathbb{R}^3 .

dit theoretisch belang omdat bifurcaties van periodieke oplossingen niet op een andere manier gemakkelijk toegankelijk zijn. We weten nu via afbeeldingen wat we mogen verwachten. Ten tweede zijn er veel interessante gevallen waarvoor de Poincaré-afbeelding voldoende nauwkeurig benaderd kan worden om uitspraken over bifurcaties te doen. In opgave 10 is een numeriek voorbeeld gegeven van het verband tussen differentiaalvergelijkingen en afbeeldingen, in het bijzonder voor de periode-verdubbelingsbifurcatie in het systeem van Rössler, zie hiervoor ook [3].

OPGAVEN

Voor wie meer gevoel wil krijgen voor dynamica en bifurcaties geven we hier een aantal opgaven. De meesten kunnen met de hand uitgevoerd worden, maar op het eind geven we er enkelen waarvoor simulatie met de computer nodig is.

1. Laat f een continu differentieerbare afbeelding zijn met een stabiel vast punt x . Toon aan dat er een open omgeving \mathcal{A} van x is zodanig dat de geïtereerden van ieder punt $y \in \mathcal{A}$ naar x convergeren. Doe hetzelfde voor een stabiele periodieke baan van f .
2. De stabiliteit van het vaste punt nul als $|f'(0)| = 1$. Laat zien dat geldt:
 - a) Het punt 0 is een aantrekkend punt van $f(x) = -x + x^2$. Hint: bekijk $f^{(2)}$.
 - b) Het punt 0 is een afstotend vast punt van de afbeelding $f(x) = x + x^3$.
 - c) Voor de afbeelding $f(x) = x + x^2$ is 0 een aantrekkend, noch een afstotend vast punt.

3. Gegeven is de logistische afbeelding $f(x) = \lambda x(1 - x)$ met $x \in [0, 1]$ en $\lambda \in [0, 4]$.
 - a) Bepaal de vaste punten van f afhankelijk van de parameter λ .
 - b) Doe hetzelfde voor periodieke punten met periode twee.
 - c) Toon aan dat voor $1 < \lambda < 3$ alle oplossingen met $x_0 \in (0, 1)$ naar hetzelfde vaste punt convergeren.
 - d) Voor welke waarden van λ zijn de punten met periode twee stabiel? Convergeren alle banen startend in het interval $(0, 1)$ naar deze periodieke baan?
4. Het bewijs van stelling 1 over enkelvoudige nulpunten.
 - a) Laat h een differentieerbare functie zijn. Toon aan dat $g(x) = ax + h(x)$ evenals $f(x) = ax$, een enkelvoudig nulpunt heeft als $a \neq 0$ en zowel h als h' klein genoeg zijn.
 - b) Neem nu aan dat $g(0) = 0$ en laat zien dat f en g geconjugueerd zijn. Dat wil zeggen, laat zien dat er een coördinatentransformatie φ is zodanig dat $g \circ \varphi = \varphi \circ f$. Hint: neem $\varphi(x) = x + y$ en gebruik de impliciete functie stelling.
5. Welke functies in de twee-parameterfamilie $g_{\lambda, \mu}$ uit stelling 3 hebben een dubbel nulpunt? Leid een verband tussen λ en μ af.
6. Bepaal de stabiliteit van de vaste punten bij de zadel-knoopbifurcatie in stelling 5.
7. Schets het oppervlak dat ontstaat door de positie van het vaste punt in de z -richting uit te zetten tegen de parameters in de x en y -richting, in het geval van de stemvorkbifurcatie uit stelling 6.
8. Laat $f_\lambda(x) = -(1 + \lambda)x - x^3$ zijn als in stelling 4. Toon aan dat $f_\lambda^{(2)}$ dan een stemvorkbifurcatie ondergaat. Toon ook het omgekeerde aan, namelijk dat als $f_\lambda(0) = 0$, $f'_\lambda(0) = -1$ en $f_\lambda^{(2)}$ een stemvorkbifurcatie ondergaat, f_λ een periode-verdubbeling ondergaat.
9. De Hénon-afbeelding heeft als faseruimte \mathbb{R}^2 en wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= bx_n\end{aligned}$$

waarin a en b parameters zijn. ‘Standaard’ waarden zijn $a = 1.4$ en $b = 0.3$. Onderzoek nu met behulp van de computer deze afbeelding. Kunt u periode-verdubbelingen ontdekken door a te variëren in de buurt van 1.3? Zie hiervoor ook [2].

10. Deze laatste opgave gaat over periode-verdubbeling in het stelsel differentiaalvergelijkingen van Rössler, hiervoor moet u numeriek bepaalde oplossingen bekijken. Nog beter is het als u er ook een Poincaré-afbeelding bij kunt maken, bijvoorbeeld op het vlak $x = 0$. De vergelijkingen zijn:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z) \\ \dot{y} &= x + y/5 \\ \dot{z} &= 1/5 + z(x - \lambda)\end{aligned}$$

Begin met $\lambda = 2$ en een willekeurig beginpunt, bijvoorbeeld $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$. De oplossing convergeert naar een periodieke baan. Neem nu een beginpunt op de gevonden baan en laat de waarde van de parameter λ in stapjes toenemen tot ongeveer 5. Wat valt u op aan de Poincaré-afbeelding als de dynamica chaotisch lijkt te zijn geworden?

DANKWOORD

Tenslotte wil ik Henk Broer, Barbara van der Doef en Prof. A.W. Grootendorst hartelijk bedanken voor het kritisch doornemen van deze tekst en voor hun opmerkingen en suggesties.

REFERENTIES

- [1] V.I. Arnold, "Catastrophy theory", Springer Verlag Berlin, 1992.
- [2] H.W. Broer, J. van de Craats en F. Verhulst, "Het einde van de voorspelbaarheid?", Aramith uitgevers, Bloemendaal, Epsilon uitgaven, Utrecht (\mathcal{E} -35), 1995.
- [3] H.W. Broer en F. Verhulst, "Dynamische systemen en chaos, een revolutie vanuit de wiskunde", \mathcal{E} -14, Epsilon uitgaven, Utrecht, 1990.
- [4] R.L. Devaney, "An introduction to chaotic dynamical systems", 2nd edition, Benjamin-Cummings, 1989.
- [5] R.M. May, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature **262** (1976), 459-467.
- [6] T. Poston and I. Stewart, "Catastrophy theory and its applications", Surveys and reference works in Mathematics 2, Pitman, London, 1978.

Symmetrie en Chaos

J. van de Craats

1. MODELLEN VOOR POPULATIEGROEI

Een van de eenvoudigste wiskundige modellen om de ontwikkeling van een populatie in de biologie te beschrijven, is de discrete exponentiële groei. Daarbij modelleert men de populatiegrootte op een serie equidistante tijdstippen door een rij getallen p_0, p_1, p_2, \dots . Het getal p_n stelt de bevolkingsgrootte op het n -de tijdstip voor, en de rij komt tot stand door, uitgaande van een beginwaarde p_0 , de volgende waarden p_1, p_2, p_3, \dots te bepalen met behulp van de formule

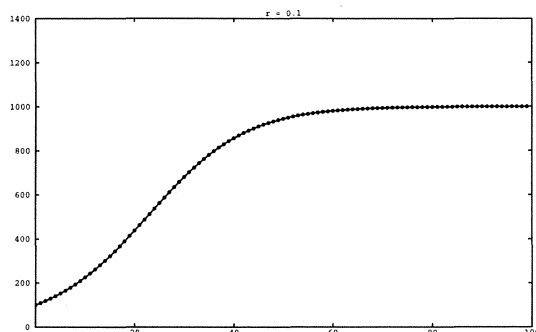
$$p_{n+1} - p_n = r \cdot p_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Het linkerlid stelt de bevolkingstoename in de $(n + 1)$ -e periode voor, en de veronderstelling die aan dit model ten grondslag ligt, is dat die toename altijd een vaste fractie r bedraagt van de populatiegrootte p_n aan het begin van de betreffende periode. De groeifactor r wordt daarbij constant verondersteld, dat wil zeggen niet afhankelijk van n . Het is direct duidelijk dat men in dit geval een expliciete formule voor p_n kan opstellen, namelijk

$$p_n = (1 + r)^n p_0.$$

Daarin komt de gediscretiseerde tijd n in de exponent voor, vandaar de naam exponentiële groei.

Hoewel exponentiële groei in veel gevallen een goede beschrijving geeft van biologische groeiprocessen, kan zo'n model de ontwikkeling van een populatie voor langere tijdsintervallen niet realistisch voorspellen. Immers, als de groeifactor r positief is, dan gaat de rij p_n op den duur naar oneindig, en wel zeer snel, zelfs indien r klein is. In de praktijk zullen externe factoren zoals voedselschaarste echter grenzen aan de groei stellen, en dan is het dus nodig om ook in het model grenzen aan de groei in te bouwen. Dat kan bijvoorbeeld door aan te nemen dat er alleen maar sprake kan zijn van een toename van de populatie als de bevolkingsgrootte p_n onder een zekere 'verzadigingswaarde' E blijft. We kunnen bijvoorbeeld eisen dat de groei afneemt naarmate p_n dichterbij E komt, en mocht p_n over het aantal E heenschieten, dan zal de groei in de periode daarna zelfs negatief zijn: de bevolking neemt dan af in plaats van toe. Dat aantal E hoort dus bij een zekere *evenwichtstoestand*, vandaar

FIGUUR 1. Logistische groei met groefactor $r = 0.1$

ook de keuze voor de letter E . Als het bevolkingsaantal precies E is, zal de populatiegrootte niet meer veranderen.

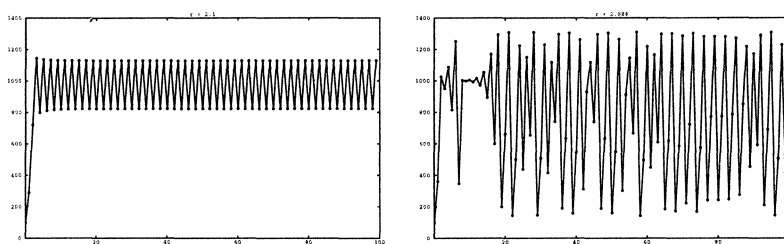
We kunnen dit bereiken met de volgende formule:

$$p_{n+1} - p_n = r \cdot p_n \left(1 - \frac{p_n}{E}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Links staat weer de bevolkingstoename in de $(n + 1)$ -e periode. Als p_n veel kleiner is dan E , is het quotiënt $\frac{p_n}{E}$ ook heel klein, dus dan is $(1 - \frac{p_n}{E})$ vrijwel gelijk aan 1. Het rechterlid is dan nog vrijwel gelijk aan $r \cdot p_n$, zodat er dan nog steeds sprake is van een vrijwel exponentiële groei. Als p_n echter in de buurt van E komt, nadert $(1 - \frac{p_n}{E})$ tot 0, en dan komt de bevolkingsgroei $p_{n+1} - p_n$ tot stilstand. Verder is het direct duidelijk dat de groei precies nul is als p_n gelijk is aan E , en negatief wordt als p_n groter wordt dan E ; dit alles in overeenstemming met hetgeen we hierboven van het model geëist hebben. In de biologie staat dit model bekend als het *logistische groeimodel*.

Figuur 1 toont een grafiek van p_n volgens dit model bij een groefactor $r = 0.1$, een beginwaarde $p_0 = 100$ en een evenwichtswaarde $E = 1000$. De waarden van p_n geven het verwachte verloop te zien: een langzame stijging naar de evenwichtswaarde E .

Met de computer kunnen we met het logistische groeimodel gemakkelijk verder experimenteren. Daarbij treden er verrassingen op als we bij gelijkblijvende p_0 en E de waarde van de groefactor r variëren, met name als we de factor r flink wat groter kiezen. Figuur 2 laat de resultaten zien bij $r = 2.1$ en $r = 2.888$. Het eerste geval geeft op den duur een periodieke schommeling tussen twee waarden te zien, en de tweede grafiek laat zien waar het in het vervolg van dit verhaal vooral om zal draaien: chaos!



FIGUUR 2. Logistische groei met groeifactor $r = 2.1$ en met groeifactor $r = 2.888$

2. HET TRAPDIAGRAM

Via de substitutie $p_i = (E(r+1)/r)x_i$ gaat het logistische groeimodel over in de eenvoudige iteratie

$$x_{n+1} = a x_n(1 - x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

waarin nog slechts de ene parameter $a = 1 + r$ voorkomt. In dit model kan men x_n opvatten als een soort genormeerde populatiegrootte: in realistische situaties geldt steeds dat $0 < x_n < 1$.

Het gedrag van deze iteratie hangt slechts af van de parameter a en van de startwaarde x_0 . Men kan zich daarvan een goed beeld vormen als men naast de iteratierij

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$$

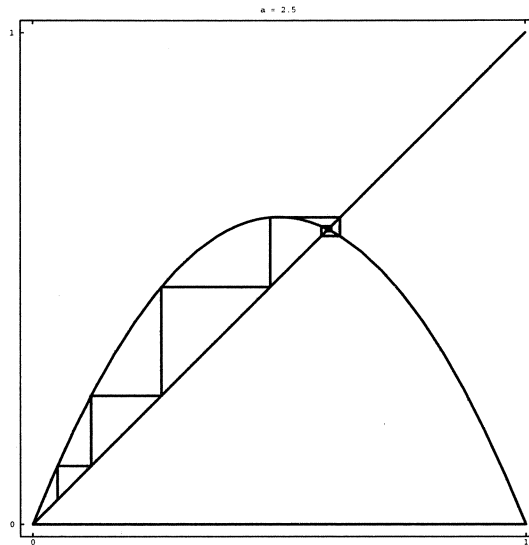
ook de volgende puntrij beschouwt:

$$(x_0, x_0), (x_0, x_1), (x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_2), \dots$$

In het xy -vlak liggen die punten afwisselend op de hoofddiagonaal $y = x$ en op de grafiek $y = ax(1 - x)$; er geldt immers $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$. Verbindt men opvolgende punten door lijnstukken, dan gaat men vanaf de diagonaal dus telkens eerst verticaal naar de grafiek, en dan weer horizontaal naar de diagonaal terug. Zo wordt telkens als het ware een trapje gevormd, en daarom noemt men dit wel een *trapdiagram*. In Figuur 3 is het trapdiagram getekend bij $a = 2.5$ en startwaarde $x_0 = 0.05$. De opvolgende iteraties x_k zijn in het trapdiagram direct uit de punten op de diagonaal af te lezen, naar believen als x -coördinaat of als y -coördinaat.

Het is duidelijk dat de evenwichtspunten van de iteratie $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ corresponderen met de snijpunten van de grafiek van de functie $f_a(x) = ax(1 - x)$ met de hoofddiagonaal $y = x$. Het ene snijpunt is de oorsprong, en het andere hoort bij $\bar{x} = 1 - 1/a$ zoals een korte berekening leert. In Figuur 3 zien we dat de iteraties met startwaarde $x_0 = 0.05$ naar \bar{x} convergeren. Dit hangt samen met de waarde van de afgeleide in \bar{x} . Omdat $f_a(\bar{x}) = \bar{x}$, geldt namelijk

$$x_{n+1} - \bar{x} = f_a(x_n) - f_a(\bar{x}) \approx f'_a(\bar{x})(x_n - \bar{x}).$$

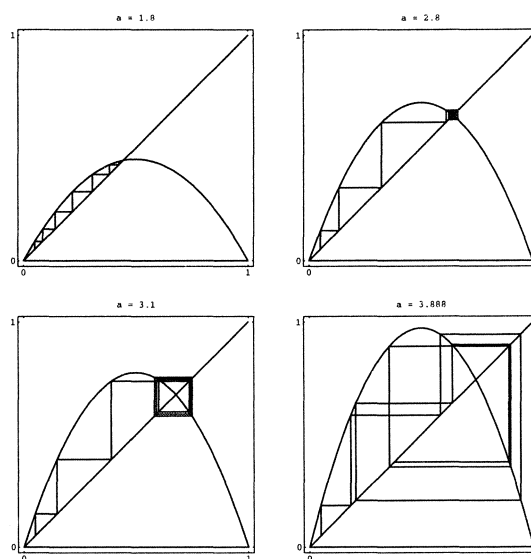


FIGUUR 3. Trapdiagram voor de logistische afbeelding $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ met $a = 2.5$ en $x_0 = 0.05$

In dit geval is $a = 2.5$ en $f'_a(\bar{x}) = -0.5$ dus als x_n voldoende dicht bij \bar{x} ligt, dan ligt x_{n+1} ongeveer twee maal zo dicht bij \bar{x} als x_n , zodat de rij snel naar \bar{x} convergeert.

In het algemeen spreekt men bij een iteratie van de vorm $x_{n+1} = f(x_n)$ met evenwichtspunt \bar{x} van een *stabiel*, of ook wel een *aantrekkend* evenwicht wanneer $|f'(\bar{x})| < 1$, en van een *instabiel* of *afstotend* evenwicht wanneer $|f'(\bar{x})| > 1$. Het is duidelijk dat de oorsprong in Figuur 3 een afstotend evenwichtspunt is. Niet alleen blijkt dat uit de afgeleide, die daar groter dan 1 is, maar ook ziet men via een trapdiagram direct dat iteraties die vlak bij de oorsprong beginnen, daar steeds verder van verwijderd raken. Een waarde van x_0 tussen 0 en 1 levert altijd een rij op die naar het andere evenwichtspunt $\bar{x} = 1 - 1/a$ convergeert, maar voor $x_0 < 0$ of $x_0 > 1$ divergeren de iteraties naar $-\infty$.

Leverde Figuur 3 een overzichtelijk plaatje van de aard van de twee evenwichtspunten voor $a = 2.5$ op, in Figuur 4 zijn trapdiagrammen bij vier andere waarden van a in beeld gebracht, telkens met dezelfde startwaarde $x_0 = 0.05$. De eerste twee, die horen bij $a = 1.8$ en $a = 2.8$, geven kwalitatief hetzelfde beeld te zien als Figuur 3: convergentie naar het evenwichtspunt $1 - 1/a$. De afgeleide ter plaatse is $f'_a(1 - 1/a) = 2 - a$, en in deze twee gevallen is deze waarde inderdaad in absolute waarde kleiner dan 1. Bij de andere waarden, $a = 3.1$ en $a = 3.888$ (die corresponderen met de waarden $r = 2.1$ en $r = 2.888$ van Figuur 2), is dit niet meer het geval, en $1 - 1/a$ is dan ook duidelijk geen aantrekkend evenwichtspunt meer. Toch treedt er ook geen vlucht naar oneindig op: voor $a = 3.1$ zien we het begin inzetten van gedrag dat ook in Figuur

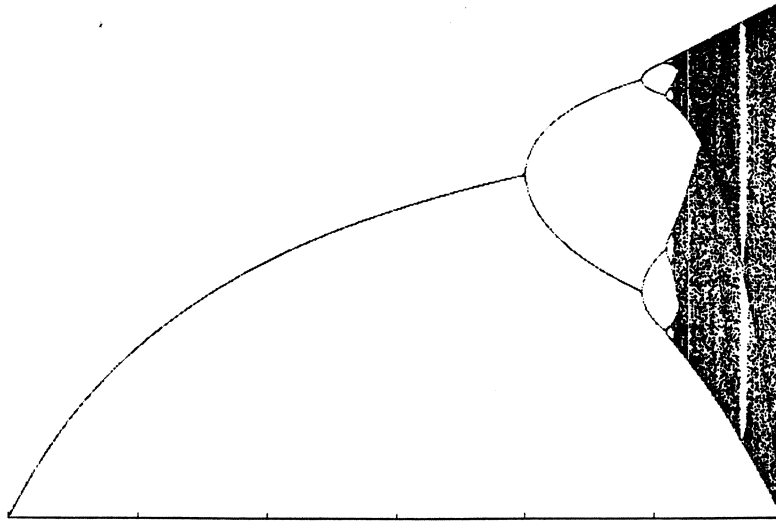


FIGUUR 4. Trapdiagram voor vier verschillende waarden van a , telkens met startwaarde $x_0 = 0.05$

2 bleek: uiteindelijke periodiciteit (met periode 2). Voor $a = 3.888$ lijkt er echter geen peil op het gedrag van de iteraties te trekken. Wel is het zo, dat ze altijd binnen het waardeninterval $f_a([0, 1]) = [0, a/4]$ blijven. Dit geldt in het algemeen voor alle iteraties die binnen $[0, 1]$ beginnen; voorwaarde is slechts dat $0 < a \leq 4$. De lezer wordt uitgenodigd experimenteel te onderzoeken wat er kan gebeuren als men $a > 4$ of $a < 0$ neemt, bijvoorbeeld bij een startwaarde 0.5.

3. HET BIFURCATIEDIAGRAM

De iteratierij $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ hangt behalve van a ook af van de startwaarde x_0 . Die afhankelijkheid van x_0 is echter in veel gevallen een voorbijgaand verschijnsel: op den duur dooft de invloed ervan uit. De populatiegrootte gaat dan, afhankelijk van de waarde van a , òf naar een evenwichtswaarde toe, òf zich periodiek herhalen, òf ze blijft chaotisch fluctueren. Via een zg. *bifurcatiediagram* kan men hiervan een globaal overzicht verkrijgen. In Figuur 5 is zo'n diagram getekend. Op de horizontale as is het interval $1 \leq a \leq 4$ uitgezet. Voor opvolgende waarden van a (met tussenstapjes van 0.001) zijn telkens vierhonderd stappen van de iteratie (2) uitgevoerd, uitgaande van een min of meer willekeurig gekozen startwaarde x_0 . De eerste driehonderd stappen zijn opgevat als 'inschakelverschijnsel', en buiten beschouwing gelaten. De uitkomsten van de laatste honderd stappen zijn als puntjes getekend boven de betreffende a -waarde. In het begin, dat wil zeggen als $1 \leq a \leq 3$, treedt er convergentie op naar de evenwichtswaarde $1 - 1/a$. De computer tekent dan dus honderd keer



FIGUUR 5. Bifurcatiediagram van de logistische afbeelding $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$

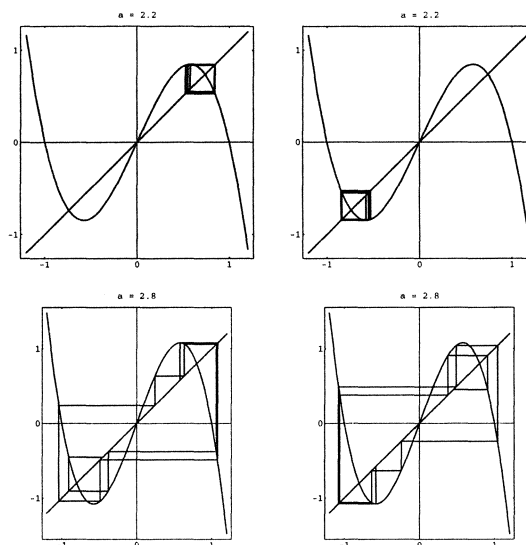
(vrijwel) hetzelfde puntje, en op dit traject verschijnt eenvoudig een deel van de grafiek van de functie $a \mapsto 1 - 1/a$. Bij $a = 3$ splitst de grafiek zich in twee takken; het systeem is periodiek geworden, de getallen x_n springen heen en weer met periode 2, en de computer tekent afwisselend een puntje op de ene en op de andere tak. Nog weer wat verder treedt opnieuw periodeverdubbeling op, en weer, en weer. Daarna wisselen chaosgedeelten af met periodieke vensters; in de voordracht van dr. I. Hoveijn wordt op de achtergronden hiervan nader ingegaan.

Wat in het bifurcatiediagram direct opvalt, is de intrigerende mengeling van orde en chaos: vreemde vertakkingen, raadselachtige witte banden, kromme lijnen die door chaoswolken bedekt worden en onder een soort floers door lijken te lopen. Het fractale karakter ervan blijkt uit het feit dat het diagram op allerlei plaatsen kleine kopieën van zichzelf lijkt te herbergen. Het bifurcatiediagram laat bij elke a zien hoe de *attractor* van het systeem, het geheel van toestanden waarnaar het systeem op den duur zal tenderen, afhangt van a . De attractor die hoort bij een zekere waarde van a is de doorsnede van het diagram met de verticale lijn met coördinaat a . Als het systeem naar een evenwichtswaarde convergeert of uiteindelijk periodiek wordt, bestaat de attractor uit een eindig aantal punten, maar bij chaotisch gedrag blijkt de attractor zelf ook vaak een fractale structuur te hebben.

4. SYMMETRISCHE ATTRACTOREN

Het logistische groeimodel is een voorbeeld van het algemene iteratieschema

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$



FIGUUR 6. Trapdiagram voor de iteratie $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)(1+x_n)$ met in de bovenste rij $a = 2.2$ en in de onderste rij $a = 2.8$. In de linkerfiguren is de startwaarde $x_0 = 0.5773$ en in de rechterfiguren $x_0 = -0.5773$

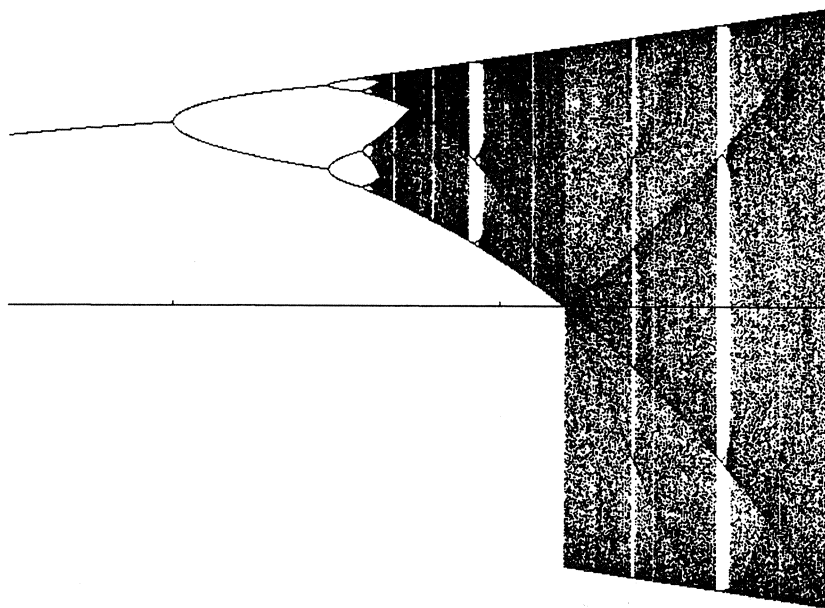
waarin de functie f meestal nog afhangt van een of meer parameters, die bepalend zijn voor de aard van de attractor. Zo'n attractor is altijd globaal invariant onder f . De punten ervan worden door f gepermuteerd, en in het algemeen zal de baan van een willekeurig startpunt x_0 zich op den duur langs de attractor (of een gedeelte ervan) gaan bewegen.

Opmerkelijk is dat symmetrieën in de functie f weerspiegeld worden in symmetrieën van de bijbehorende attractor. We illustreren dat eerst aan de hand van de iteratie

$$x_{n+1} = ax_n(1-x_n)(1+x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Hierin is dus $f(x) = ax(1-x)(1+x)$, en deze functie is symmetrisch ten opzichte van tekenwisseling: er geldt $f(-x) = -f(x)$. Begint men met startwaarde $-x_0$ in plaats van x_0 , dan geldt ook dat de n -de iteratie gelijk is aan $-x_n$ in plaats van x_n . Dit wordt geïllustreerd in Figuur 6, waar voor twee verschillende waarden van de parameter a de eerste 10 iteraties zijn geschetst uitgaande van $x_0 = 0.5773$ (links), resp. $x_0 = -0.5773$ (rechts). In de bovenste rij zien we dat de iteratierij niet van teken wisselt. Enige nadere studie van de grafiek van $f(x)$ leert dat dit voor deze waarde van a inderdaad in het algemeen geldt: een iteratierij die tussen 0 en 1 begint, blijft altijd positief, en een iteratierij die tussen -1 en 0 begint, blijft altijd negatief. Het ziet er bovendien bij deze a naar uit dat de rij op den duur periodiek wordt met periode 2.

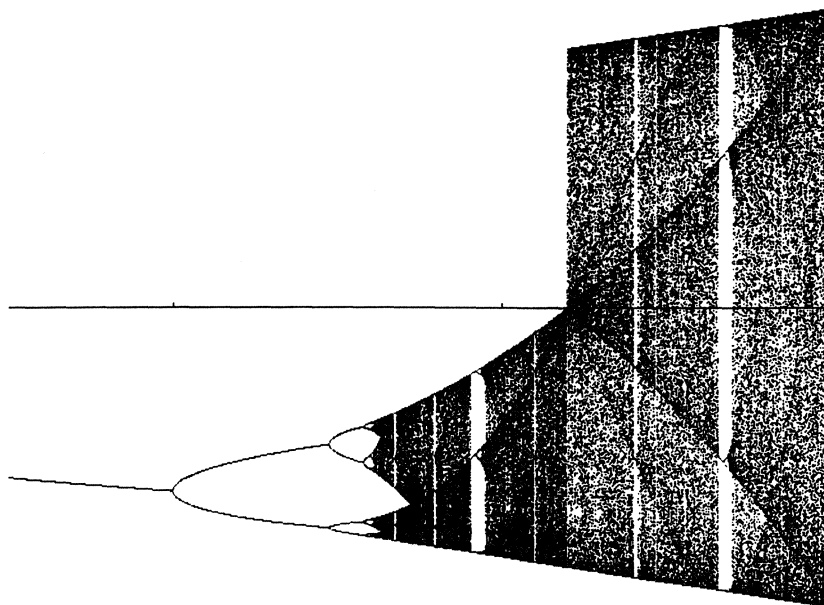
Bij de wat grotere waarde $a = 2.8$ blijkt tekenwisseling echter wel mogelijk te zijn. Een traptrede die vlak bij de top van de derdegraadsfunctie uitkomt,



FIGUUR 7. Bifurcatiediagram voor de iteratie $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)(1+x_n)$ met positieve startwaarden

geeft bij de volgende iteratiewaarde een tekenwisseling te zien. Het is niet moeilijk om te verifiëren dat $a = (3/2)\sqrt{3} \approx 2.598$ het omslagpunt is: voor kleinere waarden treden geen tekenwisselingen op, voor grotere waarden in het algemeen wel. Een andere interessante parameterwaarde is $a = 3$. Als die waarde overschreden wordt, kunnen de iteraties naar oneindig ontsnappen.

Zoals aangekondigd weerspiegelt de symmetrie van de functie zich in de symmetrie van de attractor: als een punt \bar{x} op de attractor ligt, moet ook $-\bar{x}$ op de attractor liggen. Dit is ook in het bifurcatiediagram te zien: de figuren 7 en 8 tonen het diagram, waarbij in Figuur 7 steeds een positieve startwaarde x_0 is genomen, en in Figuur 8 steeds een negatieve. De twee diagrammen zijn elkaars spiegelbeeld, en op het parametertraject $(3/2)\sqrt{3} < a \leq 3$ zijn de beide helften samengesmolten. Links van het omslagpunt bezoekt een iteratiereeks op den duur slechts één van beide helften van de attractor, maar rechts van het omslagpunt wordt de gehele, symmetrische attractor gevolgd. Net als bij de logistische iteratie kan zo'n attractor, afhankelijk van de parameter a , bestaan uit slechts eindig veel punten (zodat de iteratiereeks dan op den duur periodiek wordt), of fractaal van karakter zijn, corresponderend met een chaotisch fluctuerende iteratiereeks. Opmerkelijk is ook de structurele overeenkomst met het logistische bifurcatiediagram van Figuur 5: ook hier soortgelijke periodeverdubbelingstrajecten, chaosgebieden en periodieke vensters.



FIGUUR 8. Bifurcatiediagram voor de iteratie $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)(1+x_n)$ met negatieve startwaarden

5. COMPLEXE ITERATIES

Nog veel fraaiere resultaten kan men verkrijgen als men overgaat op complexe iteraties

$$z_{n+1} = F(z_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Door in de functie $F(z)$ symmetrieën in te bouwen van de vorm

$$F(e^{2\pi i/N} z) = e^{2\pi i/N} F(z)$$

verkrijgt men attractoren in het complexe vlak met een N -voudige draaisymmetrie rond de oorsprong. Een startwaarde ρz_0 in plaats van z_0 , waarbij

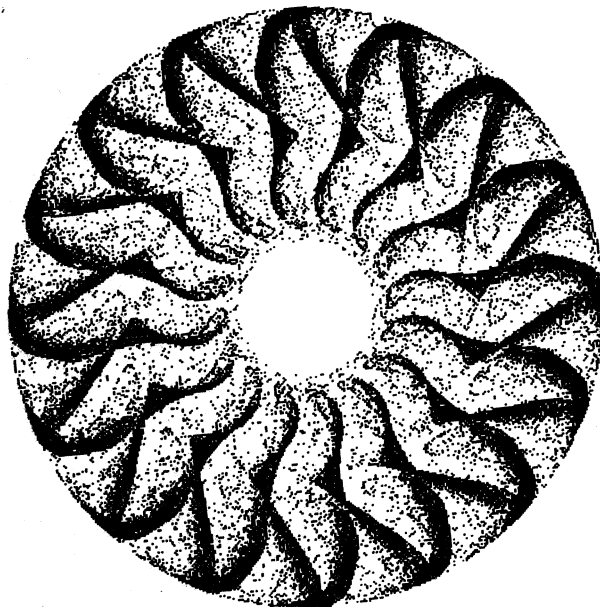
$$\rho = e^{2\pi i/N},$$

levert dan immers een iteratierij $\{\rho z_n\}$ in plaats van $\{z_n\}$ op. De rotatie $R: z \mapsto \rho z$ brengt de rotatiegroep \mathbf{Z}_N voort, en de attractor van F zal dus een symmetriegroep hebben die \mathbf{Z}_N als ondergroep bevat.

Wanneer bovendien geldt dat

$$F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$$

zullen er ook nog spiegelsymmetrieën aanwezig zijn. De spiegeling in de reële as $S: z \mapsto \bar{z}$ brengt samen met de rotatie R de dihedrale groep \mathbf{D}_N voort, die bestaat uit N rotaties en N spiegelingen.

FIGUUR 9. Een attractor met symmetriegroep \mathbf{Z}_{16}

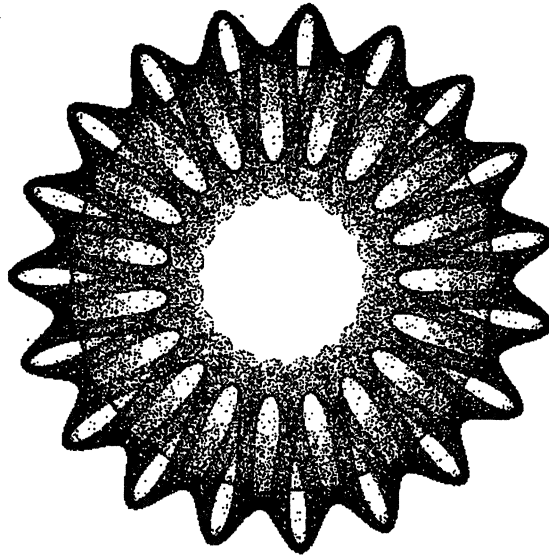
Het is niet gezegd dat een willekeurige iteratierij $\{z_n\}$ bij zo'n functie F de gehele symmetrische attractor laat zien. Om te beginnen zal er meestal sprake zijn van inschakelverschijnselen: pas na enige tijd zal de iteratierij de attractor zo dicht genaderd zijn, dat de punten ervan in praktische zin niet meer van attractorpunten zijn te onderscheiden. Het kan ook voorkomen dat de iteratierij slechts een deel van de attractor bestrijkt. In de vorige paragraaf hebben we bijvoorbeeld gezien dat de iteratierij voor $a < (3/2)\sqrt{3}$ òf uitsluitend positieve, òf uitsluitend negatieve waarden bevat. En het kan natuurlijk ook gebeuren dat de attractor bij bepaalde parameterkeuzen slechts uit een eindig aantal punten bestaat: in dat geval wordt de iteratierij op den duur periodiek en het resultaat zal er dan weinig spectaculair uitzien. Het vereist dus enig experimenteren om geschikte functies F te vinden die esthetisch fraaie resultaten opleveren. Maar dat is zeker de moeite waard.

In hun boek *Symmetry in Chaos* beschouwen Michael Field en Martin Golubitsky functies van de vorm

$$F(z) = [\lambda + \alpha z \bar{z} + \beta \operatorname{Re}(z^N) + \delta |z| + \omega i] z + \gamma (\bar{z})^{N-1}$$

waarin λ , α , β , δ , ω en γ reële parameters zijn. Voor de overwegingen die hen tot deze keuze hebben geleid, verwijzen we naar hun boek; hier zullen we slechts verifiëren dat F inderdaad de gewenste symmetrieën bezit: de symmetriegroep bevat altijd de rotatiegroep \mathbf{Z}_N , en voor $\omega = 0$ zelfs de gehele dihedrale groep \mathbf{D}_N . Om dit te verifiëren, moet allereerst worden nagegaan dat

$$F(\rho z) = \rho F(z).$$

FIGUUR 10. Een attractor met symmetriegroep D_{19}

Dat is eenvoudig: allereerst veranderen de termen tussen de vierkante haken niet onder een vermenigvuldiging van z met ρ . De factor z die aan de term tussen de vierkante haken is toegevoegd, zorgt er vervolgens voor dat deze gehele term inderdaad met ρ wordt vermenigvuldigd. Ook de term met γ blijkt precies op de juiste wijze getransformeerd te worden. Als men na wil gaan of ook

$$F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$$

geldt, ziet men dat alleen de term met ωi roet in het eten gooit, want $\bar{i} = -i$. Er zullen dus alleen spiegelsymmetrieën aanwezig zijn wanneer $\omega = 0$. Anders gezegd, door toevoeging van een (meestal kleine) term ωi kan men de spiegelsymmetrieën uit een attractor verwijderen.

Wat Field en Golubitsky hebben gedaan, is bij geschikt gekozen parameterwaarden de iteratie

$$z_{n+1} = F(z_n)$$

zeer lang laten lopen; per plaatje hebben ze tientallen miljoenen iteraties laten berekenen. Na het uitdoven van het inschakelverschijnsel dat slechts afhangt van z_0 , volgde de iteratierij de attractor, die er in de gekozen gevallen steeds chaotisch uitzag. Door bij een fijnmazig pixelveld voor elke pixel bij te houden hoe vaak die door de iteratierij bezocht werd, ontstond een soort frequentieverdeling op het pixelveld, die vertaald kon worden in een kleurengamma. Het resultaat is van een verbijsterende en intrigerende schoonheid, maar gezegd

moet worden dat dit alleen maar door gebruik van zeer krachtige computerapparatuur gerealiseerd kon worden. Met eenvoudige middelen kan men echter ook al zeer fraaie resultaten verkrijgen: een simpel BASIC-programma waarbij een pixel gewoon *aan* wordt gezet wanneer de iteratierij langs komt, levert toch al indrukwekkende plaatjes op. Naar keuze kan men de plaatjes verfijnen door het gebruik van kleuren. Meer details hierover zijn ook te vinden in het boek *Chaos met de Computer* van H.A. Lauwerier, dat dit jaar bij Epsilon Uitgaven verschenen is. We geven hieronder een aan het boek van Field en Golubitsky ontleende lijst van parameterwaarden die fraaie figuren opleveren. De lezer zal misschien zelf ook uitgebreid willen experimenteren. Gezegd kan nog worden dat schrijver dezes in 1995 bij familie en vrienden veel eer inlegde met een nieuwjaarskaart die een 19-voudige bloem liet zien die behoorde bij de parameterwaarden $N = 19$, $\lambda = -1.995$, $\alpha = 1.995$, $\beta = -1.995$, $\gamma = 3.99$, $\delta = 0.1995$ en $\omega = 0$. De startwaarde was $z_0 = .19 + .0095i$, en er waren 199495 puntjes getekend (zie Figuur 10).

N	λ	α	β	γ	δ	ω
3	1.560	-1.000	0.100	-0.820	0.000	0.120
4	-1.860	2.000	0.000	1.000	0.000	0.100
5	-1.806	1.806	0.000	1.000	0.000	0.000
5	-2.340	2.000	0.200	0.100	0.000	0.000
6	-2.420	1.000	-0.040	0.140	0.088	0.000
7	-2.080	1.000	-0.100	0.167	0.000	0.000
16	2.390	-2.500	-0.100	0.900	0.000	-0.150
23	2.409	-2.500	0.000	0.900	0.000	0.000
24	2.409	-2.500	-0.200	0.810	0.000	0.000
57	-2.225	1.500	-0.014	0.002	-0.020	0.000

LITERATUUR

1. HENK BROER, JAN VAN DE CRAATS, FERDINAND VERHULST, 1995, *Het Einde van de Voorspelbaarheid? Chaostheorie – Ideeën en toepassingen*, Aramith Uitgevers / Epsilon Uitgaven.
2. MICHAEL FIELD, MARTIN GOLUBITSKY, 1992, *Symmetry in Chaos*, Oxford University Press.
3. H.A. LAUWERIER, 1996, *Chaos met de Computer*, Epsilon Uitgaven.
4. IAN STEWART, MARTIN GOLUBITSKY, 1994, *Turings Tijger*, Aramith Uitgevers / Epsilon Uitgaven.

Chaos en Fractals – een Voorbeeld

J.M. Aarts

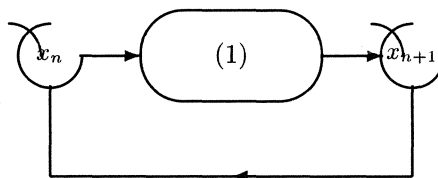
Na een korte inleiding tot de complexe dynamica onderzoeken we hoe de Fatou- en Julia-verzameling van de exponentiële functies eruitzien. We besteden aandacht aan twee karakteristieke eigenschappen van de Julia-verzameling: een statische eigenschap, de fractale structuur van de Julia-verzameling, en een dynamische eigenschap, het chaotisch gedrag van de exponentiële functie op de Julia-verzameling.

1. ITERATIEVE PROCESSEN

Om het nulpunt van een functie g te bepalen maakt men vaak gebruik van een iteratief proces. Een bekend voorbeeld is de methode van NEWTON-RAPHSON die toegepast kan worden indien g continu differentieerbaar is: neem de startwaarde x_0 voorlopig willekeurig en definieer recursief

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}, \quad (1)$$

waarbij aangenomen wordt dat $g'(x_n) \neq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Indien de rij $\langle x_n \rangle_n$ convergeert naar een punt p , dan is p een nulpunt van g . Een schematische voorstelling van het proces (1) is getekend in Figuur 1. We vatten het proces (1)



FIGUUR 1. Machine met terugkoppeling

op als een *machine met terugkoppeling*: de input is x_n ; en de output x_{n+1} wordt de nieuwe input.

Een cruciale vraag is: voor welke waarden van x_0 convergeert de rij $\langle x_n \rangle_n$. In de numerieke wiskunde neemt men voor x_0 een geschatte waarde van het nulpunt en besluit tot convergentie op experimentele gronden dan wel na lokale analyse van de functie g . Men is daarbij voornamelijk geïnteresseerd in het vinden van een geschikte startwaarde x_0 en niet zozeer in een overzicht van alle mogelijke startwaarden waarbij convergentie optreedt.

In het artikel [2] snijdt CAYLEY het probleem aan om alle waarden van x_0 te bepalen waarvoor het proces (1) convergeert. In hetzelfde artikel suggereert CAYLEY dat het natuurlijker is om bij het convergentieprobleem over te gaan op complexe getallen. Deze probleemstelling leidt tot de studie van het dynamisch systeem (\mathbb{C}, f) met $f(z) = z - \frac{g(z)}{g'(z)}$.

2. COMPLEXE DYNAMICA

De pioniers van de complexe dynamica zijn JULIA [8] en FATOU [7]. Laat een functie $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven zijn. Een *iteratie* van f is een samenstelling van de vorm

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ keer}}.$$

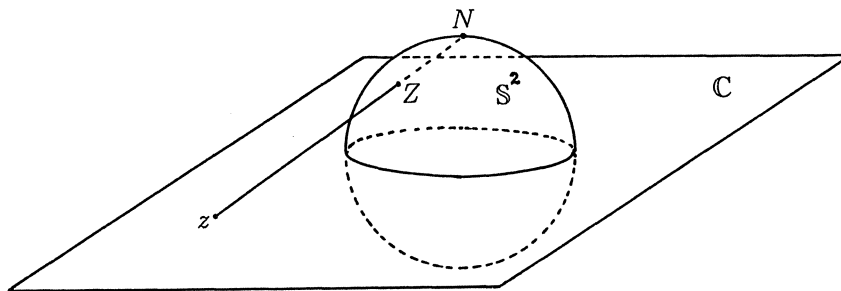
De n -voudige samenstelling van f wordt dus genoteerd met f^n . In de theorie van dynamische systemen bestudeert men het gedrag van iteraties van de afbeelding f . Men spreekt dan van het *dynamisch systeem* (\mathbb{C}, f) ; de naam brengt tot uiting dat men geïnteresseerd is in de dynamica van f , m.a.w. de eigenschappen van de rij $\langle f^n \rangle_n$ van iteraties van de functie f . De *baan* van een punt z uit \mathbb{C} onder de afbeelding f is de verzameling

$$\mathcal{O}_f(z) = \{z, f(z), f^2(z), \dots, f^n(z), \dots\}.$$

De centrale vraag is: kunnen we aangeven hoe $\mathcal{O}_f(z)$ eruit ziet? Wat is het asymptotisch gedrag van f of, iets eenvoudiger gesteld, wat is de waarde van $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z)$ voor $z \in \mathbb{C}$, zo de limiet al bestaat? Hier is een voorbeeld.

VOORBEELD 2.1 Zij $f(z) = z^2$. Voor welke z_0 bestaat $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z_0)$? Voor alle z_0 met $|z_0| < 1$ is de limiet gelijk aan 0. Voor alle z_0 met $|z_0| > 1$ bestaat de limiet niet. Verder is $f(1) = 1$ en dus is de limiet gelijk aan 1 voor $z_0 = 1$. Het punt 1 heet een *dekpunt*, of *vast punt*, van f . Ook 0 is een vast punt. Als z_0 gelijk is aan een k -de eenheidswortel, met $k = 2^n$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$, dan is de limiet eveneens gelijk aan 1. Voor de andere waarden van z_0 bestaat de limiet niet. Er zijn verschillende punten met een interessant dynamisch gedrag. We bekijken $w = e^{\frac{2}{3}\pi i}$. Dan is $f(w) = w^2 = e^{\frac{4}{3}\pi i}$ en $f^2(w) = w^4 = w$. Op grond hiervan noemen we w een *periodiek punt* met *periode* 2. De rij $\langle f^n(w) \rangle_n$ is weliswaar niet convergent, maar de rij kan opgesplitst worden in twee convergente deelrijen zó dat één deelrij convergeert naar w en de andere naar w^2 .

Het is gebruikelijk om het complexe vlak \mathbb{C} uit te breiden door toevoeging van het punt ∞ ; het uitgebreide complexe vlak is de *Riemann-sfeer* en wordt genoteerd met $\hat{\mathbb{C}}$. De meetkundige voorstelling is als volgt. Zij \mathbb{S}^2 de eenheids-



FIGUUR 2. Riemann-sfeer

dsfeer in \mathbb{R}^3 :

$$\mathbb{S}^2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}.$$

We identificeren \mathbb{C} met het vlak $x_3 = 0$. We beelden nu \mathbb{C} af op de sfeer \mathbb{S}^2 door stereografische projectie vanuit de *noordpool* $N = (0, 0, 1)$. Dit is een bijectie tussen \mathbb{C} en $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Als $z = x + iy$ en $Z = (x_1, x_2, x_3)$ hierbij met elkaar corresponderen, dan geldt

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Als \mathbb{C} op deze wijze ingebed wordt in \mathbb{S}^2 , dan heet \mathbb{S}^2 de *Riemann-sfeer*. Het punt N representeert ∞ . We schrijven $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}}$. Terugkomend op Voorbeeld 2.1 vinden we dat voor alle w met $|w| > 1$ geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(w) = \infty$.

JULIA [8] en FATOU [7] hebben een diepgaande studie gemaakt van het dynamisch gedrag van rationale functies $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$; dat zijn functies van de vorm $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ waarin P en Q polynomen zijn. Omdat gewerkt wordt met $\hat{\mathbb{C}}$ in plaats van \mathbb{C} , zijn deze functies overal gedefinieerd. Wij zullen van de theorie betreffende de rationale functies alleen die zaken aanstippen die van belang zijn voor de rest van dit verhaal. De belangrijkste eigenschap is de *dichotomie*, of *tweedeling*: bij iedere rationale functie f hoort een splitsing van $\hat{\mathbb{C}}$ in een *Fatou-verzameling* \mathbb{F}_f en een *Julia-verzameling* \mathbb{J}_f van f :

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{F}_f \cup \mathbb{J}_f, \text{ terwijl } \mathbb{F}_f \cap \mathbb{J}_f = \emptyset. \quad (2)$$

De Fatou-verzameling \mathbb{F}_f is een open verzameling. Het is de verzameling van alle punten waar de rij $\langle f^n \rangle_n$ zich ordelijk gedraagt in de volgende zin: bij

ieder punt van \mathbb{F} is er een omgeving U zó dat de rij $\langle f^n|U \rangle_n$ een uniform convergente deelrij heeft. De Julia-verzameling \mathbb{J}_f is het complement van \mathbb{F}_f . De Julia-verzameling van f is een gesloten verzameling. Het gedrag van de rij $\langle f^n|\mathbb{F}_f \rangle_n$ is oncontroleerbaar; men zegt wel dat er *op de Julia-verzameling chaos heerst*.

Dit is waarschijnlijk het juiste moment om op te merken dat de begrippen chaos en fractal meestal niet scherp zijn gedefinieerd. Volgens de oorspronkelijke definitie van MANDELBROT [9] is een fractal een figuur waarvan de Hausdorff-dimensie echt groter is dan de topologische dimensie. Een belangrijke eigenschap van fractals is hun zelf-gelijkvormigheid: de lokale vorm van een fractal is min of meer gelijkvormig met de globale vorm. Maar niet elke figuur die zelf-gelijkvormig is, is een fractal volgens de definitie van MANDELBROT. In [6] doet FALCONER een poging om het begrip fractal zo nauwkeurig mogelijk vast te leggen. Dit gebeurt aan de hand van een lange lijst van eigenschappen waaraan het begrip van fractal moet voldoen. In [4] geeft DEVANEY een preciese definitie van chaos. Een essentieel onderdeel van de definitie is de *gevoelige afhankelijkheid in de beginvoorwaarden*, die we nu beschrijven.

DEFINITIE 2.2 Een dynamisch systeem (X, f) heeft *gevoelige afhankelijkheid in de beginvoorwaarden* indien er een constante $\eta > 0$ bestaat zó dat er bij ieder punt $p \in X$ en iedere $\delta > 0$ een $x \in X$ en $n \in \mathbb{N}$ bestaan zó dat $d(p, x) < \delta$, terwijl $d(f^n(p), f^n(x)) > \eta$.

VOORBEELD 2.3 We keren terug naar Voorbeeld 2.1. De Fatou verzameling van $f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ is $\{z \mid |z| \neq 1\}$, de Julia-verzameling is $\{z \mid |z| = 1\}$. Immers, als $|z| \neq 1$, kies dan voor U een open schijfje met straal $\frac{1}{2}|1 - |z||$. Dan convergeert $f^n(U)$ naar 0 of naar ∞ . We zien hieruit dat $\{z \mid |z| \neq 1\} \subset \mathbb{F}_f$. We laten nu zien dat $\{z \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{J}_f$. Het bewijs is uit het ongerijmde. Zij $|p| = 1$ en neem eens aan dat p een omgeving V heeft zó dat de rij $\langle f^n|V \rangle_n$ een uniform convergente deelrij $\langle f^{n_k} \rangle_k$ heeft. Door, indien nodig, V door een kleiner cirkelschijfje te vervangen kunnen we bereiken dat V samenhangend is. Merk op dat de limiet \tilde{f} van de convergente deelrij continu is wegens het feit dat de convergentie uniform is. In het bijzonder is $\tilde{f}(V)$ samenhangend. Nu geldt voor iedere w uit V met $|w| < 1$ dat $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(w) = 0$; dus $\tilde{f}(w) = 0$. Voor iedere w uit V met $|w| > 1$ geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(w) = \infty$ en dus $\tilde{f}(w) = \infty$. Voor iedere w uit V met $|w| = 1$ is $|f^n(w)| = 1$. Daaruit volgt dat $\tilde{f}(V)$ niet samenhangend is. Zo hebben we een tegenspraak bereikt. Daaruit blijkt dat p niet tot de Fatou-verzameling van f behoort, en dus $p \in \mathbb{J}_f$.

Tenslotte, het systeem $(\widehat{\mathbb{C}}, f)$ heeft geen gevoelige afhankelijkheid in de beginvoorwaarden (denk aan 0), maar het systeem $(\mathbb{S}^1, f|\mathbb{S}^1)$, waarin \mathbb{S}^1 de eenheidscirkel is, wel.

We merken op dat uit de definities volgt dat de Fatou- en Julia-verzameling volledige invarianten zijn, d.w.z.

$$f^{-1}(\mathbb{F}_f) = \mathbb{F}_f = f(\mathbb{F}_f) \text{ en } f^{-1}(\mathbb{J}_f) = \mathbb{J}_f = f(\mathbb{J}_f). \quad (3)$$

In de formule is $f^{-1}(\mathbb{F}_f)$ het volledig origineel van \mathbb{F}_f , dat is de verzameling $\{z \mid f(z) \in \mathbb{J}_f\}$.

De volgende stelling geeft nuttige informatie over de Julia-verzameling.

STELLING 2.4. *Laat $f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ een analytische functie zijn. Zij p een afstotend dekpunt, d.w.z. $f(p) = p$ en $|f'(p)| > 1$. Dan geldt $p \in \mathbb{J}_f$.*

BEWIJS. Het bewijs is uit het ongerijmde. Neem eens aan dat $p \in \mathbb{F}_f$. Dan is er een (open) omgeving V van p en een rij $\langle n_k \rangle_k$ zó dat $\langle f^{n_k} \| V \rangle_k$ uniform op V convergeert naar een functie \tilde{f} . Dan is \tilde{f} als uniforme limiet van analytische functies weer analytisch en er geldt $(f^{n_k})' \rightarrow \tilde{f}'$. In het bijzonder $(f^{n_k})'(p) \rightarrow \tilde{f}'(p)$. Maar met de kettingregel vinden we $|(f^{n_k})'(p)| \rightarrow \infty$. Dit is een tegenspraak.

Het werk van MANDELBROT heeft nieuwe impulsen gegeven aan de complexe dynamica. MANDELBROT was als eerste in staat om met behulp van de computer goede plaatjes van Julia-verzamelingen te maken. Zie [10] voor werkelijk fraaie plaatjes. De eenvoudigste, niet-triviale, familie van rationale functies is die van de kwadratische polynomen. MANDELBROT gaf een heel gedetailleerd overzicht van alle kwadratische systemen. Zoals te doen gebruikelijk is, gaat aan het maken van zo'n overzicht een indeling van de kwadratische systemen in equivalentieklassen vooraf.

DEFINITIE 2.5 Laat $(\widehat{\mathbb{C}}, f)$ en $(\widehat{\mathbb{C}}, g)$ dynamische systemen zijn. We noemen deze systemen *equivalent* indien er een Möbius-transformatie M bestaat zó dat $M \circ f = g \circ M$, m.a.w. het volgende diagram is commutatief

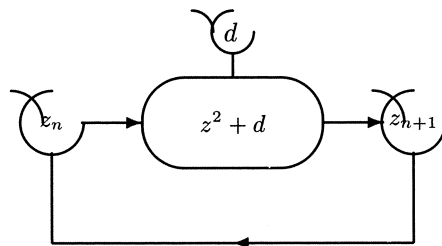
$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f} & \widehat{\mathbb{C}} \\ M \downarrow & & \downarrow M \\ \widehat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{g} & \widehat{\mathbb{C}} \end{array}$$

De afbeelding M is een analytisch homeomorfisme. Omdat het diagram commutatief is, geldt $M(\mathcal{O}_f(z)) = \mathcal{O}_g(M(z))$, m.a.w. de Möbius-transformatie M voert de banen van f over in banen van g , en omgekeerd. Hieruit volgt direct dat equivalente systemen hetzelfde dynamisch gedrag hebben. We lichten het begrip van equivalentie toe aan de hand van een voorbeeld.

VOORBEELD 2.6 Beschouw een willekeurig kwadratisch polynoom $P(z) = az^2 + 2bz + c$. Zij $Q(z) = z^2 + d$, met $d = ac + b - b^2$. Hierin zijn a, b, c en d complexe getallen. Als nu $M(z) = az + b$, dan geldt

$$Q \circ M(z) = a^2 z^2 + 2abz + ac + b = M \circ P(z).$$

We zien dat $(\widehat{\mathbb{C}}, P)$ equivalent is met $(\widehat{\mathbb{C}}, Q)$.



FIGUUR 3. Kwadratische systemen

Uit dit voorbeeld blijkt dat men zich, voor het verkrijgen van een overzicht van het gedrag van alle kwadratische polynomen, kan beperken tot polynomen van de vorm $z^2 + d$. De situatie is schematisch weergegeven in Figuur 3. Bij het systematisch onderzoek van de systemen $(\hat{\mathbb{C}}, z^2 + d)$, $d \in \mathbb{C}$ speelt de *Mandelbrot-verzameling* een grote rol. De Mandelbrot-verzameling is de verzameling van alle parameters d met de eigenschap dat de verzameling \mathbb{J}_{z^2+d} samenhangend is. De positie van de parameter d in de Mandelbrot-verzameling geeft veel informatie over de vorm van de bijbehorende Julia-verzameling \mathbb{J}_{z^2+d} . Dit is echter niet het onderwerp van deze voordracht. We verwijzen naar [10] en [11] voor een boeiende uiteenzetting van deze theorie.

3. DE EXPONENTIËLE FAMILIE

Aangemoedigd door het succes van het systematisch onderzoek van de kwadratische familie kan men op zoek gaan naar andere families van afbeeldingen en daarbij een soortgelijke theorie opzetten. Zoiets is met succes ondernomen door DEVANEY [3]. De Julia-verzamelingen van exponentiële functies is het hoofdonderwerp van deze voordracht. Ter geruststelling kan ik zeggen dat de theorie over de exponentiële familie eenvoudiger is dan die van de kwadratische polynomen!

We brengen eerst enkele eigenschappen van de exponentiële functie in herinnering. Ter vereenvoudiging van de notatie schrijven we $E(z)$ in plaats van e^z . Er geldt

$$E(x + iy) = E(x)E(iy) = E(x) \cos y + iE(x) \sin y.$$

De belangrijkste eigenschap is dat de functie E periodiek modulo $2\pi i$ is. Verder zien we dat de exponentiële functie E een verticale lijn $x = c$ afbeeldt op een cirkel met middelpunt 0 en straal $E(c)$. Een horizontale lijn $y = c$ wordt door E afgebeeld op een halfrechte vanuit 0; de lijnen $y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, worden afgebeeld op de positieve reële as; de lijnen $y = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ worden afgebeeld op de negatieve reële as.

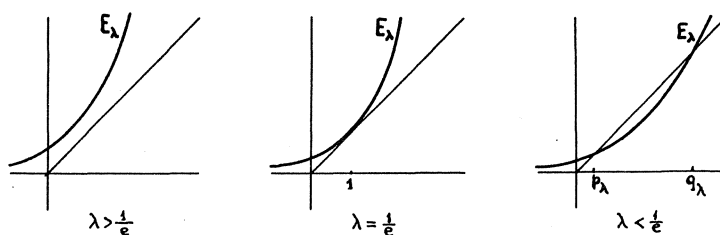
De dynamica van de exponentiële functie is chaotisch. In 1981 werd door MISIUREWICZ de volgende stelling bewezen.

STELLING 3.1. $\mathbb{J}_E = \mathbb{C}$, en dus $\mathbb{F}_E = \emptyset$.

Een bewijs van deze stelling kan gevonden worden in [4]. In [3] begint DEVANEY met de studie van de *exponentiële familie*: $E_\lambda(z) = \lambda E(z)$ waarbij $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Voor $\lambda > \frac{1}{e}$ geldt $\mathbb{J}_{E_\lambda} = \mathbb{C}$. Het bewijs van deze eigenschap is in wezen hetzelfde als dat van de voorgaande stelling.

We zullen nu proberen duidelijk te maken hoe de verzamelingen \mathbb{J}_{E_λ} voor $0 < \lambda \leq \frac{1}{e}$ eruit zien. Het dynamisch gedrag van de functies E_λ , $0 < \lambda \leq \frac{1}{e}$ is totaal verschillend van dat van de functies E_λ met $\lambda > \frac{1}{e}$. Er is sprake van bifurcatie.

Om dit verschijnsel te begrijpen bekijken we eerst de grafieken van de functies $E_\lambda \| \mathbb{R}$ voor verschillende waarden van λ . Kortheidshalve schrijven we E_λ in plaats van $E_\lambda \| \mathbb{R}$. Zie Figuur 4. Voor $\lambda > \frac{1}{e}$ heeft de functie E_λ geen dekpunt.



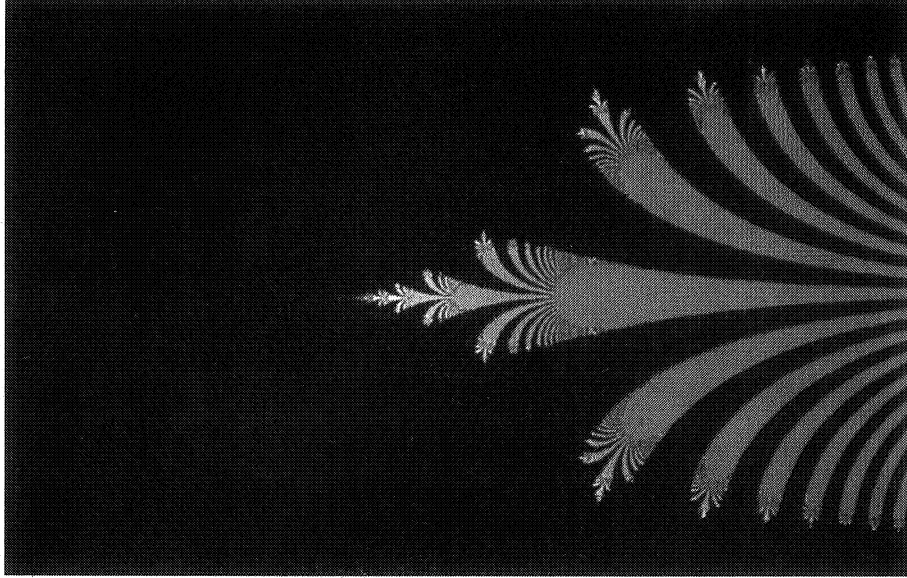
FIGUUR 4. De functies E_λ voor verschillende waarden van λ

De functie $E_{1/e}$ heeft één dekpunt, namelijk 1. Dit is een neutraal dekpunt. Voor $\lambda < 1/e$ heeft E_λ twee dekpunten, die we p_λ en q_λ noemen, $p_\lambda < q_\lambda$. Omdat $E_\lambda(1) < 1$, is $p_\lambda < 1 < q_\lambda$. Verder is

$$E'_\lambda(p_\lambda) = \lambda E(p_\lambda) = p_\lambda < 1 \text{ en } E'_\lambda(q_\lambda) = \lambda E(q_\lambda) = q_\lambda > 1.$$

Dus p_λ is een aantrekkend dekpunt en q_λ is een afstotend dekpunt. De bifurcatie is dus een zadel-knoop-bifurcatie.

We zullen nu de Fatou- en Julia-verzamelingen van de functies E_λ voor $0 < \lambda < \frac{1}{e}$ bepalen. Voor de functie $E_{1/e}$ zijn de resultaten nagenoeg hetzelfde. We gaan daar echter niet verder op in. In Figuur 5 is een computer-plaatje van $\mathbb{F}_{E_{.36}}$ en $\mathbb{J}_{E_{.36}}$ afgebeeld. Uit het onderstaande zal blijken volgens welke instructies zo'n plaatje door de computer wordt gegenereerd. Het zwarte deel (vanaf de linkerkant) stelt de Fatou-verzameling voor. De waaier, rechts in de figuur, stelt de Julia-verzameling voor. De waaier wordt door DEVANEY het *Cantor-boeket* van de functie $E_{.36}$ genoemd. Bij nadere bestudering blijkt dat de structuur van de Julia-verzameling heel anders is dan de structuur die men in het plaatje ziet. Bij de analyse van de structuur maken we gebruik van de volgende stelling uit de complexe-functietheorie die bekend staat als het Lemma van SCHWARZ.



FIGUUR 5. Fatou- en Julia-verzameling van de functie $E_{.36}(z) = .36 E(z)$

STELLING 3.2. *Laat $f: D \rightarrow D$ een analytische functie zijn van de schijf $D = \{z \mid |z| < 1\}$ in zichzelf zó dat $f(0) = 0$. Dan geldt $|f(z)| \leq |z|$ voor alle z en $|f'(0)| \leq 1$. Als in één van deze uitspraken een gelijktteken optreedt dan is $f(z) = E(i\theta)z$, m.a.w. f is een rotatie.*

Een voor de dynamica interessant gevolg van de stelling is het volgende. Als f aan de voorwaarden van de stelling voldoet en als f geen rotatie is, dan geldt $\mathbb{F}_f = D$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = 0$. We merken verder nog op dat de rol van 0 in deze gevolgtrekking geen bijzondere is. Zij namelijk $g: D \rightarrow D$ een functie zó dat $g(\beta) = \beta$ voor een zekere β . Beschouw de Möbius-transformatie M die gedefinieerd is door

$$M(z) = \frac{z - \beta}{1 - \overline{\beta}z}.$$

Dan is $M(D) = D$ en $M(\beta) = 0$. Definieer nu $g = M \circ f \circ M^{-1}$. Dan voldoet g aan de voorwaarden van de stelling. Omdat g en f equivalent zijn en dus dezelfde dynamische eigenschappen hebben, geldt dat g equivalent is met een rotatie of dat $\mathbb{F}_g = D$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(z) = \beta$. Op eenzelfde manier kunnen we inzien dat het niet essentieel is dat de straal van D gelijk aan 1 is. Ook de positie van de schijf is niet van belang. We formuleren dit resultaat als volgt.

STELLING 3.3. *Laat $f: D \rightarrow D$ een analytische afbeelding zijn van een open cirkelschijf D in zichzelf. Als $f(\beta) = \beta$ voor zekere β , dan is f equivalent met een rotatie of $\mathbb{F}_f = D$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = \beta$.*

De Fatou-verzameling van de functie E_λ wordt in de volgende stelling beschreven.

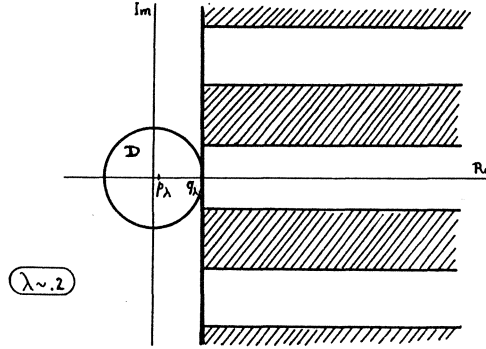
STELLING 3.4. *Zij $0 < \lambda < \frac{1}{e}$. Met q_λ geven we het grootste dekpunt van de functie E_λ aan. De cirkelschijf D is gedefinieerd door $D = \{z \mid |z| < q_\lambda\}$. Dan geldt*

$$\mathbb{F}_{E_\lambda} = D \cup E_\lambda^{-1}(D) \cup E_\lambda^{-2}(D) \cup \dots \cup E_\lambda^{-n}(D) \cup \dots \quad (4)$$

Hierin is $E_\lambda^{-n}(D) = E_\lambda^{-1}(E_\lambda^{-(n-1)}(D))$ voor $n \geq 2$.

BEWIJS. (Begin)

We verwijzen naar Figuur 6. De cirkelschijf D bevat het kleinste dekpunt p_λ



FIGUUR 6. De groeiende Fatou-verzameling

van E_λ . Er geldt

$$|E'_\lambda(p_\lambda)| = E_\lambda(p_\lambda) = p_\lambda < 1.$$

Hieruit volgt dat p_λ een aantrekkend dekpunt is. Verder geldt voor iedere z in D

$$|E_\lambda(z)| = E_\lambda(\operatorname{Re} z) \leq E_\lambda(q_\lambda) = q_\lambda.$$

We zien dat de functie E_λ de schijf D in zichzelf afbeeldt. We kunnen nu Stelling 3.3 toepassen. Omdat p_λ een aantrekkend dekpunt is, kan $E_\lambda|_D$ niet equivalent zijn met een rotatie. Derhalve volgt dat de Fatou-verzameling van $E_\lambda|_D$ samenvalt met D . Maar dat betekent dat $D \subset \mathbb{F}_{E_\lambda}$. We maken nu gebruik van het feit dat de Fatou-verzameling een volledige invariant is; zie Formule (3). Het rechterlid van de Formule (4) is dus bevat in het linkerlid.

De verzameling $E_\lambda^{-1}(D)$ is gelijk aan het linker-halfvlak $\{z \mid \operatorname{Re} z < q_\lambda\}$. De verzameling $E_\lambda^{-2}(D)$ bestaat uit alle punten die door E_λ worden afgebeeld in $E_\lambda^{-1}(D)$. Daaronder zijn die punten welke door E_λ worden afgebeeld in het halfvlak $\operatorname{Re} z \leq 0$; dit zijn de punten uit de horizontale stroken

$$\{z \mid (2k + \tfrac{1}{2})\pi \leq \operatorname{Im} z \leq (2k + \tfrac{3}{2})\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De stroken zijn in Figuur 6 gedeeltelijk gearceerd. We breken hier het bewijs af en gaan nu kijken welke punten in de Julia-verzameling liggen. De rest van het bewijs volgt dan uit de complementariteit van Julia- en Fatou-verzameling.

De Julia-verzameling van E_λ

Allereerst merken we op dat $\mathbb{J}_\lambda \neq \emptyset$. Immers

$$|E'_\lambda(q_\lambda)| = E(\operatorname{Re} q_\lambda) = q_\lambda > 1.$$

Het punt q_λ is afstotend dekpunt. Volgens Stelling 2.4 behoort q_λ tot de Julia-verzameling. Volgens Formule (3) geldt hetzelfde voor de punten $q_\lambda + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

STELLING 3.5. *De halfrechten $2k\pi i + [q_\lambda, \infty)$, $k \in \mathbb{Z}$ behoren tot \mathbb{J}_{E_λ} .*

BEWIJS. Omdat de Julia-verzameling volledig invariant is, hoeven we de stelling alleen te bewijzen voor de halfrechte $[q_\lambda, \infty)$.

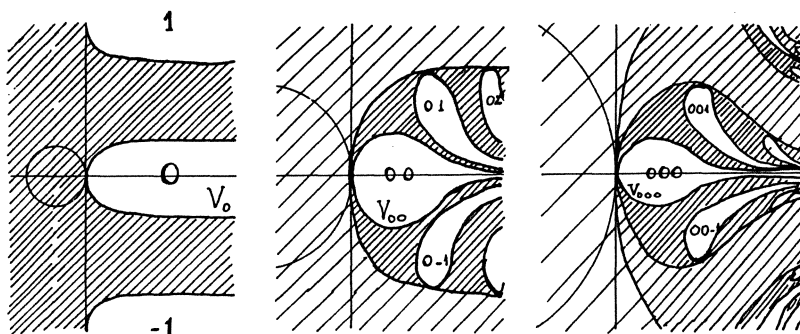
Zij S de horizontale strook $\{z \mid -\frac{\pi}{2} \leq z \leq \frac{\pi}{2}\}$. In verband met de opmerking voorafgaande aan de stelling is het voldoende om te bewijzen dat iedere x in (q_λ, ∞) tot de Julia-verzameling behoort. Uit Figuur 4 blijkt dat voor iedere $x \in (q_\lambda, \infty)$ geldt $E_\lambda^n(x) \rightarrow \infty$ voor $n \rightarrow \infty$. Neem nu eens aan dat p uit (q_λ, ∞) tot de Fatou-verzameling behoort. Dan is er een omgeving U van p en een deelrij $\langle n_k \rangle_k$ van \mathbb{N} zó dat $E_\lambda^{n_k}$ voor $k \rightarrow \infty$ uniform naar een functie \tilde{f} convergeert. We mogen aannemen dat $U \cap \mathbb{R} \subset (q_\lambda, \infty)$. De functie \tilde{f} is continu op U en $\tilde{f}(p) = \infty$. Er is dus een open cirkelschijfje V om p zó dat $|\tilde{f}(w)| > q_\lambda$ voor alle $w \in V$. Kies een w in V met $\operatorname{Im} w > 0$. Schrijf $w = x + iy$. Als $x > \log \frac{\pi}{\lambda}$ en $y \leq \frac{\pi}{2}$, dan is

$$\operatorname{Im} E_\lambda(z) = \lambda E(x) \sin y \geq \lambda E(x) \frac{2}{\pi} y > 2y.$$

Door deze formule herhaald toe te passen zien we dat $E^n(w)$ de strook S voor voldoende grote n zal verlaten. Omdat V samenhangend is, volgt hieruit dat $E_\lambda^n(V) \cap E_\lambda^{-2}(D) \neq \emptyset$ voor n groot genoeg. Maar dan is $\tilde{f}(V) \cap D \neq \emptyset$. Een tegenspraak.

We gaan nu onderzoeken welke punten onder iteratie van E_λ nooit in D terecht komen. Later zal duidelijk worden dat de verzameling van deze punten de Julia-verzameling van E_λ is. De tweedeling in Julia- en Fatou-verzameling is dus geen andere dan de verdeling in punten die onder iteratie van E_λ nooit in D terecht komen en punten die uiteindelijk wel in D terecht komen. We verwijzen naar Figuur 7. Eerst richten we onze aandacht op de linker figuur. Door middel van arcering zijn de punten aangegeven die na twee iteraties van E_λ in D terecht komen. Het complement bestaat uit aftelbaar veel *lange vingers* V_j , $j \in \mathbb{Z}$. Hierbij is de nummering van de V_j 's zó gekozen dat

$$V_j \subset \{z \mid (2j - \frac{1}{2})\pi < z < (2j + \frac{1}{2})\pi\}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$



FIGUUR 7. De structuur van de Julia-verzameling. De verhouding van de "schalen" (v.l.n.r.) is 1 : 3 : 6.

De punten uit de lange vingers V_j , $j \in \mathbb{Z}$, zijn na twee iteraties van E_λ nog niet in D aangekomen. Merk op dat iedere V_j een gesloten verzameling is. In de middelste figuur is door middel van arcering aangegeven welke punten van V_0 na drie iteraties van E_λ in D terecht komen. Het complement (binnen V_0) bestaat uit aftelbaar veel *topologische lange vingers* V_{0k} , $k \in \mathbb{Z}$. Elk van deze topologische lange vingers is een gesloten verzameling. De indicering van de V_{0k} 's zó gekozen dat $E_\lambda(V_{0k}) = V_k$. De punten uit de verzamelingen V_{0k} , $k \in \mathbb{Z}$ zijn na drie iteraties van E_λ nog niet in D aangekomen. Op analoge wijze definiëren we in de verzameling V_j de deelverzamelingen V_{jk} , $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$ zó dat $E_\lambda(V_{jk}) = V_k$. Dit proces wordt inductief voortgezet. Bij de volgende stap, zie de rechter figuur, maken we op analoge wijze de deelverzamelingen V_{jkl} van V_{jk} , $j, k, l \in \mathbb{Z}$. Het *reisschema* van de verzameling V_{jkl} onder de eerste paar iteraties van E_λ is als volgt.

$$V_{jkl} \subset V_j, \quad E_\lambda(V_{jkl}) \subset V_k, \quad E_\lambda^2(V_{jkl}) \subset V_l, .$$

Er geldt $V_{jkl} = V_j \cap E_\lambda^{-1}(V_k) \cap E_\lambda^{-2}(V_l)$.

Voor iedere rij $s = (n_0, n_1, n_2, \dots)$ van gehele getallen, $s \in \mathbb{Z}^\mathbb{N}$, definiëren we de verzameling H_s door

$$H_s = V_{n_0} \cap E_\lambda^{-1}(V_{n_1}) \cap E_\lambda^{-2}(V_{n_2}) \cap \dots \cap E_\lambda^{-k}(V_{n_k}) \cap \dots$$

H_s is dus de doorsnede van een krimpende rij topologische lange vingers; de "dikte" van de vingers gaat naar nul. Voor iedere $s \in \mathbb{Z}^\mathbb{N}$ is $H_s = \emptyset$ of H_s is een topologische kopie van de halfrechte. Dit laatste bewering zullen we niet bewijzen, maar is uit het voorgaande wel intuïtief duidelijk. Uit de definitie van H_s volgt dat $E_\lambda^k(H_s) \subset V_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$. De punten van H_s komen onder iteraties van E_λ dus nooit in D .

STELLING 3.6. $\mathbb{J}_{E_\lambda} = \bigcup \{ H_s \mid s \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \}.$

BEWIJS. We zullen deze stelling niet tot in alle details bewijzen. Het rechterlid van (5) is de verzameling van alle punten die nooit in D terecht komen onder iteratie van E_λ . Het linkerlid van (5) is dus bevat in het rechterlid van (5).

Nu bekijken we H_s waarbij de rij s van de vorm $(n_0, \dots, n_k, 0, 0, \dots)$ is, d.w.z. slechts eindig veel termen van s zijn ongelijk aan 0. Uit de beschouwingen die aan de stelling vooraf gingen, volgt dat

$$E_\lambda^{k+1}(H_s) = [q_\lambda, \infty).$$

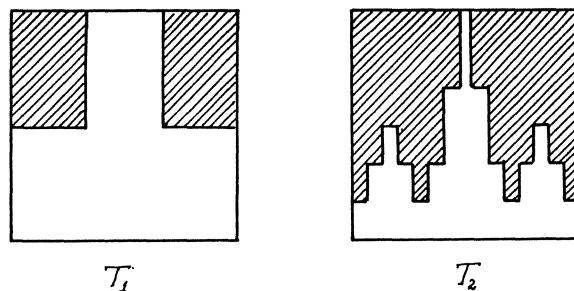
Hieruit kan men afleiden dat H_s een topologische kopie van de halfrechte is. Omdat de Julia-verzameling volledig invariant is, volgt met Stelling 3.5 dat $H_s \subset \mathbb{J}_{E_\lambda}$. Vervolgens stellen we vast dat de vereniging van de H_s over alle rijen s waarvan slechts eindig veel termen ongelijk aan 0 zijn, dicht ligt in de vereniging van alle H_s . Omdat de Julia-verzameling gesloten is, is hiermee bewezen dat het rechterlid van (5) bevat is in het linkerlid van (5).

Instructies voor computer-plaatjes We hebben gezien dat voor iedere x in (q_λ, ∞) geldt $E_\lambda^n(x) \rightarrow \infty$. Als we een punt p kiezen op een H_s dat geen eindpunt is van H_s , dan is eveneens $E_\lambda^n(p) \rightarrow \infty$. Voor rijen s waarvan slechts eindig veel termen ongelijk 0 zijn, volgt dit uit het voorgaande; de bijbehorende H_s komt immers onder iteratie van E_λ op de halfrechte $[q_\lambda, \infty)$ terecht. Voor de overige H_s volgt dit door limietovergang. Alle punten van \mathbb{J}_λ , met uitzondering van de eindpunten van een H_s , gaan onder iteratie van E_λ naar ∞ . De instructie voor de vervaardiging van computer-plaatjes van \mathbb{J}_λ is nu als volgt. Bepaal voor iedere pixel het getal n zó dat $E_\lambda^n(p) > 10$, waarbij p het middelpunt van de pixel is. (De keuze van 10 is hierbij arbitrair.) Als $n > 25$ dan stellen we $n = \infty$; dit is de afbreekprocedure. De pixels waarbij $n = \infty$ maken we zwart. De bijbehorende middelpunten behoren met grote waarschijnlijkheid tot de Fatou-verzameling. De overige pixels kleuren we rood indien bijvoorbeeld $n < 10$, oranje voor $10 \leq n < 15$, enzovoort. In het plaatje kunnen we dan zien welke punten blijven (de Fatou-verzameling) en welke punten naar oneindig lopen (de Julia-verzameling).

Een topologisch model De Julia-verzameling \mathbb{J}_λ is, zoals we gezien hebben, een "boekje" van topologische halfrechten. We gaan nu op zoek naar een topologisch model voor de Julia-verzameling. Daartoe gaan we als volgt te werk; zie Figuur 8.

Constructie van T_1 : Verdeel de basis van een vierkant in drie stukken van gelijke lengte en zet op elk zo verkregen stuk een rechthoek met hoogte achtereenvolgens $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{2}$.

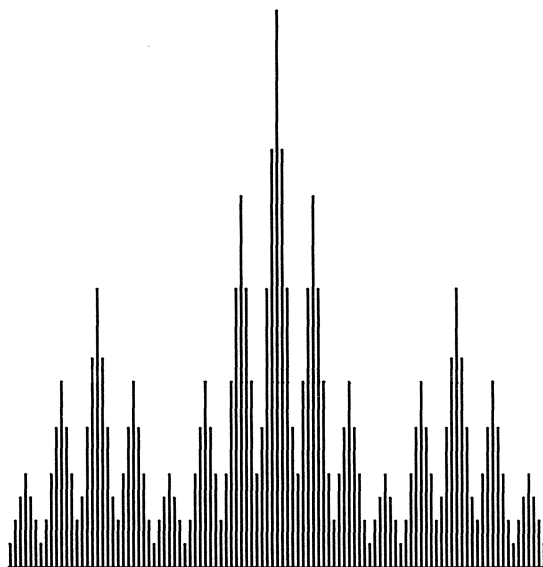
Constructie van T_2 : Verdeel van elke rechthoek in T_1 de basis in vijf stukken van gelijke lengte en zet op elk zo verkregen stukje een rechthoekje. De hoogten



FIGUUR 8. Constructie van de harige boog; de eerste stappen

van de rechthoekjes worden uit de hoogte van de rechthoek in T_1 verkregen door vermenigvuldiging met achtereenvolgens $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$.

Dit proces kunnen we inductief voortzetten. Voor de constructie van T_n verdelen we de basis van elk rechthoekje van T_{n-1} in $2n+1$ stukken van gelijke lengte. De factoren voor de hoogten zijn nu $\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \dots, \frac{n+1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}$. De doorsnede van alle T_n , $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ noemen we de *harige boog*. Figuur 9 geeft een impressie van de harige boog.



FIGUUR 9. Veel liefs uit Moskou

De harige boog bestaat uit een liggende boog, de *basis*, waarop haren zijn gezet. Ieder *haar* is een interval dat precies één punt, en wel een eindpunt, met

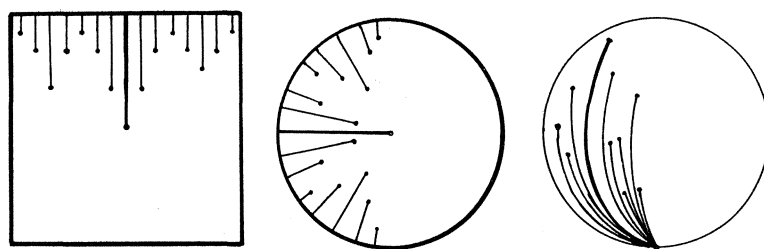
de basis gemeen heeft; het andere eindpunt van het interval heet de *top* van de haar.

Er gelden de volgende eigenschappen.

1. De harige boog is een gesloten deelverzameling van het vlak.
2. De punten waar een haar is ingeplant liggen dicht in de basis. Alle haren liggen aan één kant van de basis.
3. Ook de *haarloze* punten, de punten waar geen haar is ingeplant, liggen dicht in de basis.
4. Bij ieder gegeven haar is er zowel een rij haren van links als een rij haren van rechts met de eigenschap dat de toppen van de haren naar de top van de gegeven haar convergeren.

Deze vier eigenschappen *karacteriseren* de harige boog. Wanneer we volgens een of ander voorschrift haren op een boog implanten zó dat aan 1 tot en met 4 voldaan is, dan is de zo ontstane figuur topologisch equivalent met de harige boog.

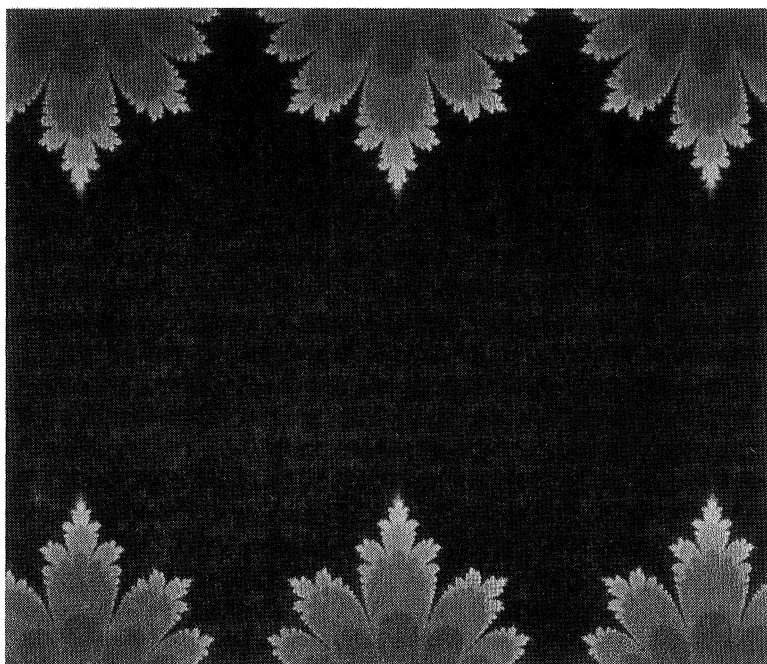
Uit de karakterisering van de harige boog volgt dat de harige boog is rijk aan topologische zelf-gelijkvormigheid: ieder deelstukje van de harige boog dat ligt tussen twee haarloze punten is topologisch equivalent met de hele harige boog, d.w.z. er is een topologische afbeelding van het deelstukje op de hele boog. Het is geenszins eenvoudig om aan te tonen dat de Julia-verzameling \mathbb{J}_λ topologisch equivalent is met de harige boog. In Figuur 10 is geschetst hoe de Riemann-sfeer na verwijdering van het punt ∞ kan worden "opengewerkt" en daarna kan worden omgevormd tot een vierkant; ook de lotgevallen van een Julia-verzameling onder deze topologische transformaties zijn geschetst. Een uiterst belangrijke consequentie van deze beschouwingen is dat voor alle



FIGUUR 10. Van Julia-verzameling naar harige boog

$0 < \lambda < \mu \leq \frac{1}{e}$ de Juliaverzamelingen \mathbb{J}_λ en \mathbb{J}_μ topologisch equivalent zijn [1].

De goniometrische functies Zoals bekend is er een nauw verband tussen de exponentiële functies en de goniometrische functies. Veel van de voorgaande beschouwingen gelden met slechts kleine wijzigingen voor de goniometrische functies. Figuur 11 is een computer-plaatje van een functie uit de cosinus familie.



FIGUUR 11. Fatou- en Julia-verzameling van $g(z) = 0.68 i \cos z$

Men kan bewijzen dat de Julia-verzameling van de functie g topologisch equivalent is met de harige boog.

REFERENTIES

- [1] J.M. AARTS en L.G. OVERSTEEGEN, The geometry of Julia sets, *Transactions American Mathematical Society* **338** (1993), 897–918
- [2] A. CAYLEY, The Newton-Fourier Imaginary Problem, *American Journal of Mathematics* **2** (1879), 97
- [3] R.L. DEVANEY, Julia sets and bifurcation diagrams for exponential maps, *Bulletin American Mathematical Society* **11** (1984), 167–171.
- [4] R.L. DEVANEY, *An Introduction to Chaotic dynamical Systems*, Addison-Wesley, Reading 1989
- [5] R.L. DEVANEY en L. KEEN, red., *Chaos and Fractals*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, **39**, American Mathematical Society, Providence 1988
- [6] K. FALCONER, *Fractal Geometry*, Wiley, New York 1990
- [7] M.P. FATOU, Sur les equations fonctionelles, *Bulletin Société Mathématique de France*, **47** (1919), 161–271; **48** (1920), 33–94 en 208–314
- [8] G. JULIA, Memoire sur l'itération des fonctions rationnelles, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, **8** (1918), 47–245
- [9] B.B. MANDELBROT *Fractals*, Freeman, San Francisco 1977
- [10] H.-O. PEITGEN en P.H. RICHTER, *The Beauty of Fractals*, Springer, Berlin 1986
- [11] H.-O. PEITGEN, H. JÜRGENS en D. SAUPE, *Fractals for the Classroom*, Springer, New York 1992



Chaos en het Weer

F. Selten

Meteorologen hebben, sinds zij in 1952 begonnen de atmosfeer in een computer na te bootsen, lange tijd de hoop gekoesterd dat het mogelijk zou zijn om het weer voor onbeperkte tijd vooruit te voorspellen. Men beseftte dat de atmosfeer weliswaar een complexe structuur heeft, maar men wist ook dat haar gedrag volledig wordt beschreven door de wetten van de mechanica en de thermodynamica. Men ging ervan uit dat de atmosfeer daarom perfect voorspelbaar zou moeten zijn als men maar voldoende informatie over de actuele toestand van de atmosfeer had en kon beschikken over computers die alle bewegingen in de atmosfeer konden beschrijven. Het was de Amerikaanse wiskundige en meteoroloog E.N. Lorenz die in 1963 aantoonde dat deze hoop ijdel is. Wat Lorenz in zijn baanbrekende werk aantoonde is dat de vergelijkingen die de bewegingen in de atmosfeer beschrijven uiterst gevoelig zijn voor kleine veranderingen in de toestand van de atmosfeer. Zo zal een kleine verandering in de huidige toestand van de atmosfeer binnen eindige tijd een compleet andere circulatie tot gevolg hebben.

Sindsdien concentreert het onderzoek zich op de vraag naar de maximale termijn waarop een voorspelling mogelijk is, de zogenaamde voorspelhorizon. Lorenz schatte deze periode nog op twee weken. Tegenwoordig is men al blij als bruikbare verwachtingen voor een periode van vijf tot zeven dagen vooruit ooit realiteit zullen worden.

Sinds Newton de wetten van de mechanica formuleerde heeft men steeds te optimistische verwachtingen gekoesterd omtrent de mogelijkheid van de mens om natuurlijke ontwikkelingen te voorzien en eventueel te beheersen. Dat is ook wel begrijpelijk. De wiskundige vergelijkingen die de veranderingen van de luchtstromingen in de atmosfeer beschrijven, kunnen op een enkel velletje papier worden genoteerd. Deze vergelijkingen zijn weliswaar complex, maar kunnen met behulp van computers worden opgelost. Wanneer weersvoorspellingen voortkomen uit het oplossen van wiskundige vergelijkingen lijkt het probleem van de eindige voorspelhorizon in eerste instantie niet erg fundamenteel. Immers, de nauwkeurigheid van de oplossing (de weersverwachting) hangt, zo zou

men denken, slechts af van de nauwkeurigheid waarmee de vergelijkingen worden opgelost. In de recent ontwikkelde wiskunde voor dynamische systemen met complex (chaotisch) gedrag wordt deze voor de hand liggende redenering genadeloos onderuit gehaald. Het is de chaoswiskunde die ons heeft gewezen op de mogelijkheid dat natuurlijke systemen als regel chaotisch gedrag vertonen en daarom uiterst gevoelig reageren op kleine veranderingen in hun toestand en op invloeden van hun omgeving. Door uiterst gevoelig te reageren op iedere prikkel, is de precieze ontwikkeling van de atmosfeer afhankelijk van de ontwikkeling van het totale ecosysteem van de aarde en kan daarvan niet los worden gezien. Zo zou het kunnen zijn dat de precieze toekomstige ontwikkeling van alle natuurlijke systemen slechts bepaald is op het niveau van het totale universum. Op dit niveau kan er van menselijk kunnen en voorspellen geen sprake zijn.

1. DE VOORSPELTECHNIEK

Voordat de fundamentele aspecten van voorspelbaarheid kunnen worden besproken is het nuttig om stil te staan bij de moderne, uit de natuurwetenschappen voortgekomen voorspelmethoden. Bij een weersverwachting wordt gebruik gemaakt van de wetmatigheden die luchtstromingen, wolken, neerslagvorming en de hele stralingshuishouding (absorptie, reflectie en verstrooiing van zonnestraling en warmtestraling) beheersen. Deze wetmatigheden kunnen worden geformuleerd in een beperkt aantal wiskundige vergelijkingen, die de ontwikkeling van de atmosferische luchtcirculatie beschrijven. De ontwikkeling op een bepaald moment wordt bepaald door de actuele toestand van de atmosfeer en door het totaal van de op de atmosfeer van buitenaf inwerkende krachten. Deze krachten zijn de wisselwerkingen met andere elementen, zoals de zon, de maan, de gebergten en oceanen; zij worden bepaald door de toestand waarin die elementen zich bevinden. De aard van de vergelijkingen is zodanig dat berekeningen van toekomstige veranderingen gelijktijdig voor de hele atmosfeer moeten worden gedaan. Voor een weersverwachting van enkele dagen vooruit moeten vele miljarden berekeningen in korte tijd worden uitgevoerd, een karwei dat niet zonder computers kan worden geklaard. Zelfs met de krachtigste computers is het niet mogelijk om veranderingen voor iedere willekeurige plaats in de atmosfeer te berekenen. De berekeningen worden daarom uitgevoerd op roosterpunten. Deze roosterpunten liggen regelmatig gerangschikt op concentrische, bolvormige schillen. De afstand tussen de roosterpunten is ongeveer honderd kilometer en die tussen de schillen ongeveer een kilometer. De wiskundige vergelijkingen worden zodanig aangepast dat de computer de berekeningen op ieder roosterpunt in de atmosfeer kan nabootsen. Omdat de roosterpunten onderlinge afstanden van honderd kilometer hebben, kan met het computermodel alleen de grootschalige structuur van de luchtbeweging worden beschreven. Kleinschalige bewegingen, zoals de beweging die stapelwolken en buien doet ontstaan, worden in het model genegeerd. Zoals gesteld wordt de ontwikkeling van de atmosferische circulatie berekend uit de actuele toes-

tand van de atmosfeer. In wiskundige termen, het maken van een weersvoorspelling is een beginwaarde probleem. Aan het begin van de berekeningen moet die toestand bekend zijn. Een schatting van de atmosferische circulatie wordt verkregen door gelijktijdig over de hele wereld metingen van druk, wind, temperatuur en luchtvochtigheid te doen vanaf het aardoppervlak tot een hoogte van ongeveer dertig kilometer. De belangrijkste metingen worden gedaan door het oplaten van radiosondes, ballonnen waaraan een meetinstrument en een zendertje zijn bevestigd. Sinds 1980 worden ook satellietmetingen gebruikt. De afstand tussen de metingen die op het land worden gedaan is ongeveer honderd kilometer en op de oceanen duizend kilometer. Dit betekent dat alleen de grootschalige structuur van de hoge- en lagedrukgebieden en de hierbij behorende luchtbewegingen wordt vastgelegd. Wanneer we de begintoeestand nauwkeuriger willen bepalen moet het aantal metingen, met name op de oceanen, drastisch worden opgevoerd. Hetzelfde geldt voor de op de atmosfeer inwerkende krachten. Alleen de macrostructuur van de grootste werkzame krachten wordt voorgeschreven. Deze worden geleverd door de zon en door de grootschalige topografie van de aarde (gebergten, landzee verdeling).

Als de begintoeestand en het externe krachtenveld bekend zijn, kunnen de wiskundige vergelijkingen worden opgelost. De oplossing beschrijft de atmosferische circulatie ongeveer tien minuten later. De berekende toestand kan weer als begintoeestand worden gebruikt en de vergelijkingen opnieuw opgelost. Op deze manier kunnen, in stappen van tien minuten, de toekomstige ontwikkelingen worden berekend voor iedere gewenste periode in de toekomst.

In Europa heeft een aantal landen, waaronder Nederland, gezamenlijk een rekencentrum opgericht, waar iedere dag een tiendaagse verwachting wordt gemaakt. Dit is het European Centre for Medium-range Weather Forecasts (ECMWF), dat in Reading (Engeland) is gevestigd. De ervaring leert dat gemiddeld na vijf dagen de fouten in de berekeningen zo groot zijn, dat ze onbruikbaar zijn als basis voor een weersverwachting. Vijf dagen is dan ook de maximale termijn waarvoor het KNMI weersverwachtingen uitgeeft.

Hoeveel 'winst' valt er nog te boeken? Nog steeds zijn er meteorologen die verwachten dat een verdichting van het waarnemingsnetwerk en een verkleining van de afstand tussen de roosterpunten in het model, mogelijk te maken door krachtigere computers, tot een substantiële verbetering van de weersverwachting en een dienovereenkomstige verlenging van de verwachtingstermijn zal leiden. Naarmate de microstructuur van de luchtbewegingen en krachten in het computer model beter wordt beschreven, krijgt het model uiteraard een betere gelijkenis met de echte atmosfeer. Op basis hiervan mag worden verwacht dat met een complexer model betere weersverwachtingen kunnen worden gemaakt. Verderop zal worden nagegaan of en in hoeverre deze voor de hand liggende conclusie waar is. Hierbij zullen we ons concentreren op de vraag die de kern van het voorspelprobleem vormt: zijn creatieve processen voorspelbaar?

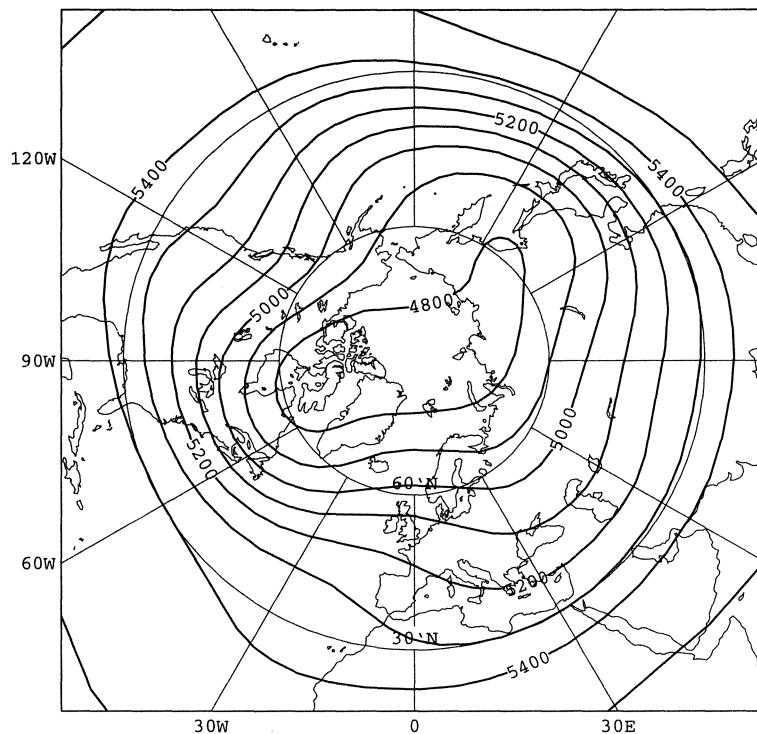
2. DE ATMOSFERISCHE CIRCULATIE

Er ontstaat beweging in de atmosfeer wanneer er van buitenaf krachten op worden uitgeoefend. De zon is de grootste drijvende kracht. De zonnestraling veroorzaakt verwarming, die in de tropen groter is dan aan de polen. Als lucht niet gelijkmatig wordt verwarmd, ontstaan drukverschillen waaruit beweging voortkomt. In de tropen stijgt de lucht op en stroomt op grote hoogte in de richting van beide polen. Aan de grond stroomt de lucht terug naar de evenaar. Wanneer we spreken over beweging in de atmosfeer wordt beweging bedoeld ten opzichte van de roterende aarde. Wanneer er geen beweging is, roteert de lucht in werkelijkheid mee met het aardoppervlak en is in absolute zin dus niet in rust. De snelheid van luchtdeeltjes is dan gelijk aan de snelheid van het aardoppervlak ter plaatse en kan worden uitgedrukt in de hoeksnelheid van de aarde en de afstand tot de rotatieas. De hoeksnelheid van de aarde is constant, maar de afstand tot de rotatieas en dus de snelheid worden kleiner met toenemende geografische breedte. In een bewegingloze atmosfeer is de snelheid van luchtdeeltjes aan de evenaar dus het grootst. Wanneer deze luchtdeeltjes uitstromen in de richting van de polen nemen ze hun roterende beweging (impulsmoment) met zich mee naar hogere breedte, waar de snelheid van het aardoppervlak kleiner is. Zo ontstaat een oost-west beweging ten opzichte van het aardoppervlak. Dit wordt het Coriolis-effect genoemd. In de noordwaartse beweging van de lucht ontstaan westenwinden. In de terugkeerstroming aan de grond worden de westenwinden zwakker en ontstaat er op lage breedte zelfs een zone met oostenwinden (passaten).

Het inhomogene aardoppervlak oefent invloed uit op deze luchtstroming. De grote gebergten zoals de Rocky Mountains en de Himalaya's vormen kolossale barières, terwijl de oceanen warmte en waterdamp met de atmosfeer uitwisselen. Door de wisselwerking met bergketens en oceanen worden in de westelijke stroming, die op gematigde breedten ontstaat, meanders of golfbewegingen opgewekt. Deze hebben afmetingen van zes- tot tienduizend kilometer en worden planetaire golven genoemd. Tot zover is beweging in de atmosfeer een opgelegde reactie op zeer grote permanent werkende krachten. Periodieke schommelingen in de sterkte van deze krachten of wisselwerkingen hebben schommelingen in de atmosferische circulatie tot gevolg. Zo is de temperatuur in de winter lager dan in de zomer, terwijl de westenwinden sterker zijn. We noemen de gemiddelde beweging in de atmosfeer, die primair het resultaat is van de externe krachten, de klimatologische circulatie. In figuur 1 is de gemiddelde beweging in januari in de atmosfeer op het 500 hPa drukvlak weergegeven.

De jaarlijkse schommelingen in de klimatologische circulatie vertonen een zekere regelmaat. Het periodieke aspect van deze circulatie is uiteraard voorspelbaar. Discussies over atmosferische voorspelbaarheid richten zich daarom op de niet-periodieke aspecten.

De zon verwarmt de tropen aanzienlijk meer dan de twee polen. De energie die op hoge geografische breedten door infrarode uitstraling verloren gaat, moet dus voortdurend worden aangevuld. Op gematigde breedten kan de klimatolo-



FIGUUR 1. Gemiddelde hoogte van het 500 hPa drukvlak (in meters) in januari. De wind blaast evenwijdig aan de hoogtelijnen en is sterker naarmate de hoogtelijnen dichter bij elkaar liggen. De sterkste westenwinden komen voor aan de oostkust van het Noordamerikaanse en het Aziatische continent.

gische circulatie niet in voldoende mate in deze transportbehoefte voorzien. De atmosfeer gebruikt een heel ander, uiterst boeiend mechanisme. Als het noord-zuid temperatuurcontrast ergens een kritische drempel bereikt, gebeuren er opmerkelijke dingen. De klimatologische circulatie wordt instabiel en begint plotseling te vervormen. Er ontstaat als het ware uit het niets een circulatiestructuur met een duidelijk herkenbare eigen identiteit. In deze lokale, coherente structuur wordt de lucht in een ordelijke roterende of wervelende beweging gebracht. Uit de klimatologische circulatie kunnen verschillende soorten coherente structuren ontstaan. Vaak zijn het reusachtige wervels, die depressies worden genoemd. Depressies hebben een afmeting van ongeveer duizend kilometer en een levensduur van vijf dagen. In die tijd bestrijken ze een gebied van vele duizenden kilometers. Het temperatuurverschil tussen de polen en de evenaar is een potentiële bron van energie die in beweging kan worden omgezet. Als deze potentiële energiebron een kritische drempel overschrijdt, is de atmosfeer in staat om uit kleine, ongeordende bewegingen een krachtige depressie te creëren. In een depressie valt polaire koude lucht als het ware in een zuidwaartse

beweging naar beneden en stijgt tropische warme lucht versneld op in noordwaartse richting. De roterende beweging in de depressie transporteert zo snel en efficiënt grote hoeveelheden warme lucht naar het noorden en koude lucht naar het zuiden. Het noord-zuid temperatuur verschil wordt hierdoor kleiner en de depressie sterft een natuurlijke dood omdat zijn groei en instandhouding afhankelijk zijn van temperatuurcontrasten.

Depressies vereffen de toenemende contrasten in de atmosfeer op een ruimtelijke schaal van duizenden kilometers. Zij hebben hiervoor enkele dagen nodig, vandaar hun levensduur van gemiddeld vijf dagen. De voortdurende inwerking van de zon en het aardoppervlak doet ook op kleinere ruimtelijke schaal contrasten ontstaan. De atmosfeer reageert hierop door de passende coherente structuren te vormen op ruimtelijke schalen van duizenden kilometers tot enkele millimeters. Zo worden in een nooit eindigende cyclus de depressies en buiencomplexen, tropische cyclonen en tornado's, schapewolkjes en turbulente werveltjes geboren. Iedere dag opnieuw laten de weersatellieten de overweldigende schoonheid zien van deze wervelende dans, waarvan de basispatronen weliswaar steeds terugkeren, maar toch eindeloos gevarieerd worden, zodat de dans zich nooit herhaalt, maar altijd nieuw is. De wolkenformaties op de satellietfoto in figuur 2 laten duidelijk de grote verscheidenheid aan structuren in de stroming zien op allerlei ruimtelijke schalen.

3. DE VOORSPELHORIZON

Het zal duidelijk zijn dat voor een betrouwbare weersverwachting de vorming van coherente structuren door de computermodellen moet kunnen worden nagebootst. Immers, een bui die op een afstand van tien kilometer wordt gevormd kan in een half uur het weer bij ons bepalen en een depressie die boven Noord-Amerika wordt gevormd beïnvloedt de weersgesteldheid in Nederland in twee of drie dagen. Wat is er nodig om de vorming van een depressie correct, dat wil zeggen op de juiste plaats en op het juiste tijdstip, te voorspellen? We hebben gezien dat wanneer het temperatuurcontrast toeneemt, de atmosfeer extreem gevoelig wordt. Kleine fluctuaties in de circulatie zijn dan voldoende om het geboorteproces van een actieve depressie op gang te brengen. Zo heeft een kleine oorzaak grote gevolgen. Kan die oorzaak willekeurig klein zijn? Zijn bijvoorbeeld de wervelingetjes die ontstaan door de wieslag van een vogel of het dichtslaan van een deur voldoende om het geboorteproces op gang te brengen? Het antwoord is: niet rechtstreeks, maar op een indirecte manier zijn ze wel degelijk bepalend voor het toekomstige weer. De vorming van een depressie kan in gang worden gezet door een toevallig aanwezige kleine verstoring. Dit is bijvoorbeeld een buiencomplex met een ruimtelijke afmeting van honderd kilometer. Deze structuur is gevormd om op zijn eigen ruimtelijke schaal temperatuurverschillen op te heffen en veroorzaakt op de ruimtelijke schaal van depressies een heel klein beetje beweging. Bij gunstige omstandigheden, dus wanneer de temperatuurverschillen groot genoeg zijn, brengt zo'n kleine verstoring van de grootschalige circulatie de ontwikkeling van een actieve stormde-



FIGUUR 2. Wolkenformaties boven de Atlantische ocean verraden allerlei circulatiestructuren. De meest dominante structuur is de spiraalvormige wolkenstructuur ten westen van Ierland die kenmerkend is voor een depressie. De honingraatstructuur die de depressie ingezogen wordt verradt een georganiseerd patroon van opstijgende en dalende luchtbewegingen (convectie-cellen). Deze ontstaan doordat koude lucht over relatief warm water gevoerd wordt. Ten westen van IJsland is een kleinere wervel zichtbaar.

pressie op gang.

We kunnen nu in de verleiding komen om te proberen de vorming van depressies te gaan voorspellen door de computermodellen en het waarnemingsnetwerk zodanig te verfijnen dat coherente structuren met afmetingen van hon-

derd kilometer door het model kunnen worden beschreven. Hiervoor is nodig dat de computers een honderd tot duizend keer zo grote capaciteit hebben dan de huidige supercomputers en dat op regelmatige afstanden van tien bij tien kilometer iedere paar uur metingen worden verricht. Afgezien van de astronomische kosten die dit met zich meebrengt, zal de toename van de bruikbare verwachtingstermijn gering zijn. Coherente structuren met een ruimtelijke schaal van honderd kilometer kunnen contrasten veel sneller vereffen dan depressies en leven daarom veel korter, ongeveer een dag. De winst in voorspelhorizon is dan ook hoogstens een dag. Als we een week vooruit willen voorspellen, moet ook de vorming van deze structuren voorspeld worden. Zij komen echter voort uit fluctuaties die door nog kleinere, coherente structuren worden veroorzaakt met afmetingen van ongeveer tien kilometer en een levensduur van enkele uren. Ook de vorming van deze structuren moet dan worden voorspeld. Ons computermodel heeft nu al een roosterpuntafstand van een kilometer. De benodigde computercapaciteit is opgelopen tot tien miljoen keer de huidige beschikbare capaciteit en op afstanden van een kilometer moeten over de hele wereld iedere tien minuten heel precies metingen worden verricht. Toch is de winst die dit fantastische avontuur oplevert nog steeds gering: slechts enkele uren! Lorenz heeft aangetoond dat zelfs wanneer we de kleinste turbulente werveltjes kunnen vastleggen in de begintoestand en beschrijven in het computermodel, dan nog is de totale winst in voorspelhorizon slechts enkele dagen. Al heel snel zal de luchtstroming op kleine schaal worden beïnvloed door toevallige externe oorzaken. Iemand stookt ergens een vuurtje, waardoor luchtbeweging ontstaat; een vliegtuig stijgt op; een vlinder vliegt van een bloem. Deze niet voorziene luchtstromingen veroorzaken kleine fouten in de door de computer berekende ontwikkeling van de circulatie. Na ongeveer een week manifesteren deze fouten zich op de ruimtelijke schaal van depressies. Dan geeft het model niet langer zinvolle informatie over het toekomstige weer. Zo zijn, door een keten van atmosferische gevoeligheden, de kleinst mogelijke krachten van invloed op de toekomstige ontwikkeling van het weer. We weten dat de atmosfeer depressies moet vormen, maar de precieze tijd en plaats zijn onvoorspelbaar en zelfs onbepaald, omdat niemand kan weten wanneer vlinders hun vleugels strekken.

Wat kan dan wel worden voorspeld? Wanneer depressies eenmaal ontstaan zijn, is hun verdere levensloop, dus hun groei en verval, niet zo extreem gevoelig voor kleine onzekerheden. Die ontwikkeling verloopt dus regelmatig. Wanneer de metingen de geboorte van een nieuwe depressie hebben vastgelegd, geven de modelberekeningen vaak een redelijk nauwkeurige schatting van haar verdere ontwikkeling. Het is dus de evolutie van reeds aanwezige coherente structuren die voorspelbaar is. Voorspelbaarheid is hiermee gekoppeld aan de levensduur van coherente structuren. Depressies leven ongeveer vijf dagen. Dat is dus ook de maximale voorspeltermijn van het KNMI. Het weer dat is gekoppeld aan coherente structuren met een kortere levensduur en kleinere ruimtelijke afmetingen is op veel kortere termijn voorspelbaar. Zo kan de invloed die een bestaande bui op het toekomstige weer zal hebben hooguit een

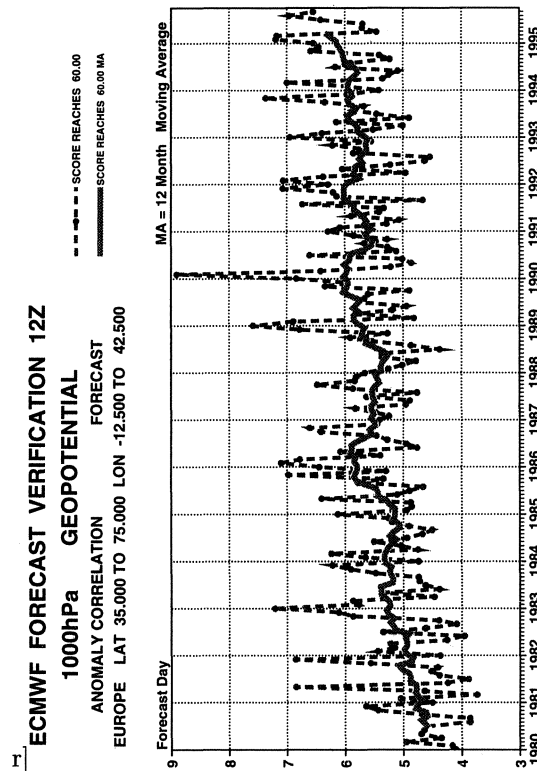
uur vooruit worden geschat. De voorspelhorizon van weersystemen blijft echter steeds onzeker. Op ieder moment kunnen nieuwe structuren worden gevormd die de ontwikkeling van bestaande structuren beïnvloeden. Zo kan de door het model verwachte ontwikkeling van een bestaande depressie soms toch volledig fout gaan.

4. KANSVOORSPELLINGEN

Tot voor enkele jaren geleden was de praktijk van het weersvoorspellen dat men uit de beschikbare metingen zo goed mogelijk de huidige toestand van de atmosfeer afleidde en vervolgens deze toestand met behulp van een wiskundig model van de atmosfeer naar de toekomst extrapoleerde. Zo verkreeg men een verwachting voor het weer van de komende dagen. Men trachtte deze ene verwachting te verbeteren door de fout in de schatting van de huidige toestand van de atmosfeer te verkleinen en door het gebruikte computermodel van de atmosfeer steeds realistischer te maken. Aanvankelijk slaagde men er inderdaad in om de gemiddelde termijn waarop een verwachting nog bruikbare informatie bevat te verlengen. Sinds 1986 echter is de gemiddelde bruikbare verwachtingstermijn ondanks grote aanpassingen aan de verwerking van de meetgegevens en aan het computermodel nauwelijks nog toegenomen (zie figuur 3).

Langzamerhand is het besef doorgedrongen dat het maken van een enkele verwachting slechts een trekking is uit een heel scala van even waarschijnlijke verwachtingen. Gegeven de onzekerheid in de beginsituatie die uitgedrukt kan worden in een verzameling van even waarschijnlijke toestanden, bestaat er een verzameling van even waarschijnlijke toekomstige toestanden. In plaats van een begintoestand naar de toekomst te extrapoleren moet men dus eigenlijk de hele verzameling van begintoestanden naar de toekomst extrapoleren om een gefundeerde uitspraak te kunnen doen over het te verwachten weer. Liggen alle toestanden aan het begin van de verwachting nog redelijk dicht bij elkaar, na verloop van tijd worden de verschillen tussen de verwachtingen steeds groter aangezien de ontwikkelingen in de atmosfeer gevoelig zijn voor kleine veranderingen in de circulatie. Op een gegeven moment zijn de verschillen zo groot geworden dat de verzameling verwachtingen verschillende weertypes voorspellen. Een zekere uitspraak over bijvoorbeeld de windsterkte is dan niet meer mogelijk, wel een uitspraak in termen van kansen (80 windkracht 8 bijvoorbeeld). Het blijkt in de praktijk dat soms de verwachtingen al snel uiteenlopen maar op andere dagen dat de verschillen geruime tijd vrij klein blijven. In het laatste geval kan men dus voor langere tijd een verwachting uitgeven.

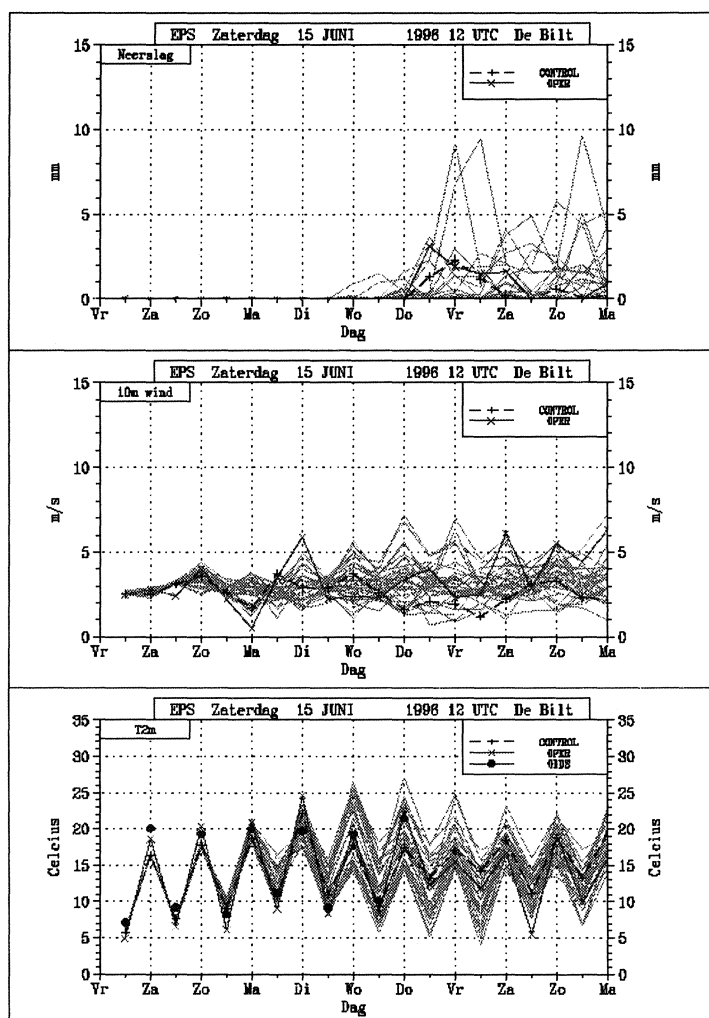
In het huidige voorspelbaarheidsonderzoek gaat het erom vooraf te herkennen in welke mate de ontwikkeling van de circulatie gevoelig is voor kleine veranderingen in de beginsituatie. De meest voor de hand liggende methode om dit te onderzoeken is de ensemblemethode. Deze bestaat uit het maken van een groot aantal verwachtingen (een ensemble) voor dezelfde periode. Alle verwachtingen



FIGUUR 3. Historisch overzicht van de kwaliteit van de ECMWF verwachtingen voor Europa. Als maat voor de kwaliteit is weergegeven de dag waarop het voorspelde luchtdrukpatroon teveel gaat afwijken van het opgetreden luchtdrukpatroon om op basis daarvan nog een bruikbare weersverwachting te kunnen geven. De gestippelde lijn zijn maandgemiddeldes, de getrokken lijn een lopend gemiddelde over 12 maanden. Duidelijk is ook te zien dat het winterweer beter voorspelbaar is dan het zomerweer.

starten met dezelfde begintoestand, waarin iedere keer op willekeurige wijze een kleine verandering wordt aangebracht. De verandering is zo klein dat de nieuw verkregen begintoestand even waarschijnlijk is als de oorspronkelijke. Uit de manier waarop de verwachtingen zich van elkaar verwijderen, wordt de kans berekend dat zich een bepaalde weersituatie zal voordoen. Voor de atmosfeer moeten, in principe, honderden verwachtingen worden gemaakt om tot een betrouwbare schatting van de kansverdeling te kunnen komen. Dit is in de praktijk natuurlijk niet haalbaar.

In 1992 zijn het ECMWF en het KNMI begonnen met het experimenteel produceren van ensembles, om de mate van voorspelbaarheid van de atmosfeer te schatten. De ECMWF-ensembles bestaan uit tweeënderig verwachtingen.



FIGUUR 4. Voorbeeld van een ECMWF ensemble verwachting. Weergegeven zijn in totaal 34 verwachtingen voor wind, temperatuur en neerslag in het roosterpunt dat het dichtst bij De Bilt ligt. De operationele verwachting is gemaakt met het hoge resolutie model, de controle verwachting met lagere resolutie. Verder zijn met dezelfde lagere resolutie nog 32 10-daagse verwachtingen geproduceerd startend vanaf verstoorde initiële condities. De eerste 4 dagen blijkt de verwachting tamelijk ongevoelig maar na 5 dagen worden de verschillen, en dus de onzekerheid, snel groter.

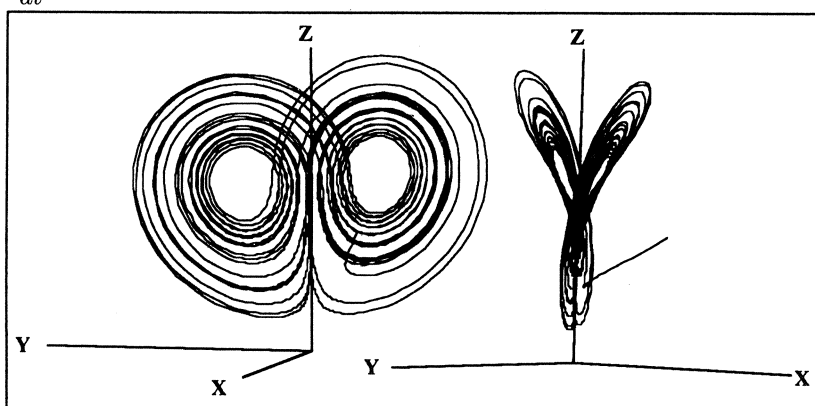
Het gehanteerde computermodel heeft een wat grovere resolutie dan het officiële model, zodat de rekentijd enigszins binnen de perken blijft: drie uur rekentijd op de Cray supercomputer voor het hele ensemble, hetgeen evenveel is als voor het gewone model met volledige resolutie. Uit deze hele set van verwachtingen kan de meteoroloog kansen afleiden op het optreden van bepaalde weercirculaties, en of de officiële verwachting van het ECMWF al dan niet gevoelig is voor kleine beginfouten. Een voorbeeld van zo'n ensembleverwachting is weergegeven in figuur 4.

5. OVER DE LEZING

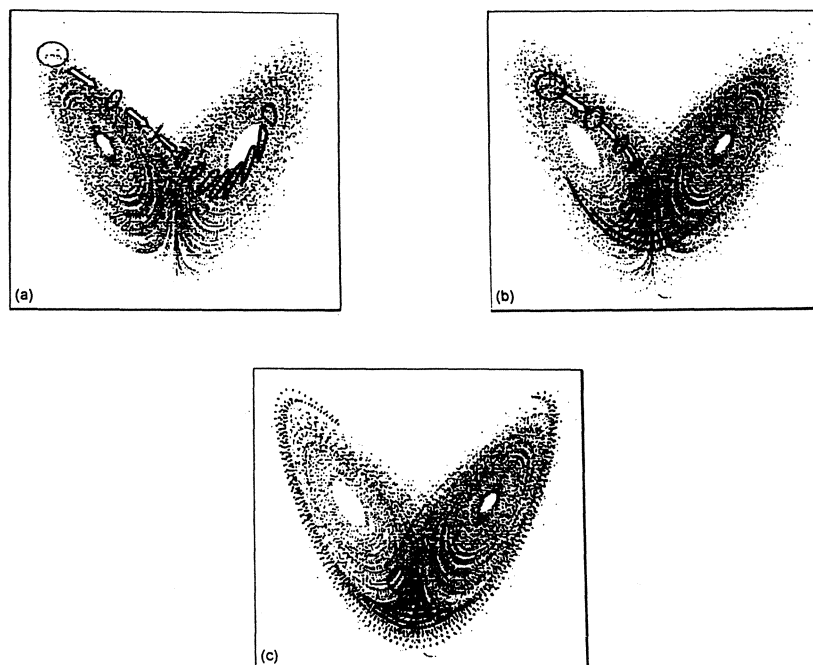
Als het weer al zo moeilijk te voorspellen is, kun je je afvragen wat we überhaupt dan nog over het toekomstig klimaat kunnen zeggen. Aan de hand van een sterk vereenvoudigd wiskundig model van de atmosferische circulatie zal in deze lezing ingegaan worden op het probleem van de voorspelbaarheid van het weer en het klimaat. We zullen zien hoe een dergelijk simpel model het denken over dit complexe probleem vergemakkelijkt.

Het model dat we zullen gebruiken is in 1963 door Lorenz afgeleid en heeft aan de wieg gestaan van wat we nu de 'Chaos theorie' zijn gaan noemen. Het Lorenz model bestaat uit een set van drie gekoppelde gewone eerste orde differentiaalvergelijkingen die voorschrijven hoe X , Y en Z in de loop van de tijd veranderen

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \frac{dY}{dt} &= -XZ + rX - Y \\ \frac{dZ}{dt} &= XY - bZ,\end{aligned}$$



FIGUUR 5. Twee aanzichten van een oplossing van het Lorenz model voor $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$, startend vanaf een willekeurige beginconditie. Duidelijk is te zien dat de oplossing initieel snel naar de aantrekker 'getrokken' wordt.



FIGUUR 6. Evolutie van een ensemble van begincondities op de Lorenz aantrekker voor drie verschillende posities op de aantrekker. Het ensemble is geplot iedere 12 uur en geïntegreerd over 5 dagen. De aantrekker zelf is geplot als referentie.

X , Y en Z zijn drie tijdafhankelijke variabelen en σ , r and b zijn drie constantes. Startend van een bepaalde beginwaarde voor X , Y en Z kan door numerieke integratie berekend worden hoe X , Y en Z in de loop van de tijd veranderen. Een voorbeeld van zo'n integratie is weergegeven in figuur 5. Voor bepaalde waardes van de constantes blijkt dat de oplossing gevoelig afhankelijk is van de beginconditie. Met andere woorden, dit eenvoudige model vertoont net als complexere weersmodellen chaotisch gedrag. Aangezien de oplossing van dit model eenvoudig zichtbaar te maken is in een drie-dimensionale ruimte, is het uitermate geschikt als hulpmiddel om het gedrag van complexere modellen te doorgronden. We zullen de hierboven besproken ensemblotechniek illustreren aan de hand van dit model (zie figuur 6). Verder zullen we zien hoe dit eenvoudige model inspireert tot het stellen van nieuwe, zinvolle vragen in het huidige wetenschappelijke onderzoek naar mogelijke klimaatveranderingen.

Sprekers

Prof.dr. J.M. Aarts

wg.: TU Delft, Faculteit TWI, Mekelweg 4, 2628 CD Delft, 015 - 2785399, e-mail: j.m.aarts@twi.tudelft.nl
hs.: Van Kinschotstraat 13, 2614 XJ Delft, 015 - 2126448

Prof.dr. H.W. Broer

wg.: RU Groningen, Fac. Wiskunde en Informatica, Postbus 800, 9700 AV Groningen, 050 - 3633959, e-mail: broer@math.rug.nl
hs.: H. Colleniusstraat 68, 9718 KW Groningen, 050 - 3141354

Prof.dr. J. van de Craats

wg.: Universiteit van Amsterdam, e-mail: jcr@euronet.nl
hs.: Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL Oosterhout, 0162 - 457364

Prof.dr. A.W. Grootendorst

hs.: Aardbeistraat 11, 2564 TM Den Haag, 070 - 3232936

Dr. I. Hoveijn

wg.: RU Groningen, Vakgroep Wiskunde, Postbus 800, 9700 AV Groningen, 050 - 3633975, e-mail: hoveijn@math.rug.nl
hs.: Bekemaheerd 87, 9737 PS Groningen, 050 - 5426605

Dr. C. de Pater

wg.: Vrije Universiteit Amsterdam, Vakgroep Algemene Vorming, De Boelelaan 1083, 1081 HV Amsterdam, 020 - 4447983
hs.: Krugerlaan 69, 2806 EC Gouda, 0182 - 525916

Dr. J.A. van Ruler

wg.: RU Groningen, Faculteit der Wijsbegeerte, A-weg 30, 9718 CW Groningen, 050 - 3636161
hs.: 1e Binnenvestgracht 3C, 2312 BA Leiden, 071 - 5130747

Dr.ir. F.M. Selten

wg.: KNMI, Postbus 201, 3730 AE De Bilt, 030 - 2206761, e-mail: seltenf@knmi.nl
hs.: Paardenhoeve 36, 3992 PJ Houten, 030 - 6380981

Prof.dr. F. Verhulst

wg.: Universiteit Utrecht, Vakgroep Wiskunde, Postbus 80010, 3508 TA Utrecht, 030 - 2531526, e-mail: verhulst@math.ruu.nl
hs.: Parkstraat 11, 3581 PB Utrecht, 030 - 2311516

MC SYLLABI

- 1.1 F. Göbel, J. van de Lune. *Leergang beslistkunde, deel 1: wiskundige basiskennis*. 1965.
- 1.2 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang beslistkunde, deel 2: kansberekening*. 1965.
- 1.3 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang beslistkunde, deel 3: statistiek* 1966
- 1.4 G. de Leve, W. Molenaar. *Leergang beslistkunde, deel 4: Markovketens en wachttijden*. 1966.
- 1.5 J. Kriens, G. de Leve. *Leergang beslistkunde, deel 5: inleiding tot de mathematische beslistkunde*. 1966.
- 1.6a B. Dorhout, J. Kriens. *Leergang beslistkunde, deel 6a: wiskundige programmering I*. 1968.
- 1.6b B. Dorhout, J. Kriens, J.Th. van Lieshout. *Leergang beslistkunde, deel 6b: wiskundige programmering 2*. 1977. 1.7a G. de Leve. *Leergang beslistkunde, deel 7a: dynamische programmering I*. 1968.
- 1.7b G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang beslistkunde, deel 7b: dynamische programmering 2*. 1970.
- 1.7c G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang beslistkunde, deel 7c: dynamische programmering 3*. 1971.
- 1.8 J. Kriens, F. Göbel, W. Molenaar. *Leergang beslistkunde, deel 8: minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie*. 1968.
- 2.1 G.J.R. Förch, P.J. van der Houwen, R.P. van de Riet. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 1*. 1967.
- 2.2. L. Dekker, T.J. dekker, P.J. van der Houwen, M.N. Spijker. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 2*. 1968.
- 3.1. H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 1*. 1967
- 3.2. H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 2*. 1968
- 3.3. H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 3*. 1968
- 4 H.A. Lauwerier. *Representaties van groepen*. 1968
- 5 J.H. van Lint, J.J. Seidel, P.C. Baayen. *Colloquium discrete wiskunde*. 1968.
6. K.K. Koksm. *Cursus ALGOL 60*. 1969.
- 7.1 *Colloquium moderne rekenmachine, deel 1*. 1969.
- 7.2 *Colloquium moderne rekenmachine, deel 2*. 1969.
- 8 H. Bavinck, J. Grasman. *Relaxatietrillingen*. 1969.
- 9.1 T.M.T. Coolen, G.J.R. Förch, E.M. de Jager, H.G.J. Pijs. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1*. 1970
- 9.2 W.P. van den Brink, T.M.T. Coolen, B. Dijkhuis, P.P.N. de Groen, P.J. van der Houwen, E.M. de Jager, N.M. Temme, R.J. de Vogelaere. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2*. 1970
- 10 J. Fabius, W.R. van Zwet. *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening*. 1970
- 11 H. Bart, M.A. Kaashoek, H.G.J. Pijs, W.J. de Schipper, J. de Vries. *Colloquium halfalgebra's en positieve operatoren*. 1971.
- 12 T.J. Dekker. *Numerieke algebra*. 1971
- 13 F.E.J. Kruseman Aretz. *Programmeren voor rekenautomaten; de MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8*. 1971
- 14 H. Bavinck, W. Gautschi, G.M. Willems. *Colloquium approximatietheorie*. 1971
- 15.1 T.J. Dekker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1*. 1972.
- 15.2 P.A. Beentjes, K. Dekker, P.W. Hemker, S.P.N. van Kampen, G.M. Willems. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2*. 1973.
- 15.3 P.A. Beentjes. K. Dekker, P.W. Hemker, M. van Veldhuizen *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3*. 1975.
- 16.1 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 1: de elementen van het programmeren*. 1973
- 16.2 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 2: de programmeertaal ALGOL 60*. 1973
- 17.1 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 1*. 1973.
- 17.2 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 2*. 1973.
- 17.3 N.M. Temme. *Lineaire algebra, deel 3*. 1976.
- 18 F. van der Blij, H. Freudenthal, J.J. de Songh, J.J. Seidel, A. van Wijngaarden. *Een kwart eeuw wiskunde 1946-1971, syllabus van de vakantiecursus 1971*. 1973.
- 19 A. Hordijk, R. Potharst, J.Th. Runnenburg. *Optimaal stoppen van Markovketens*. 1973.
- 20 T.M.T. Coolen, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, E. Slagt. *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen*. 1976.
- 21 J.W. de Bakker (red.). *Colloquium programmacorrectheid*. 1975.
- 22 R. Helmers, J. Oosterhoff, F.H. Ruymgaart, M.C.A. van Zuylen. *Asymptotische methoden in de toetsingstheorie; toepassingen van naburigheid*. 1976.
- 23.1 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 1*. 1976.
- 23.2 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 2*. 1977.
- 24.1 P.J. van der Houwen. *Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen, deel 1: eenstapsmethoden*. 1975.
- 25 *Colloquium structuur van programmeertalen*. 1976.
- 26.1 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 1*. 1976.
- 26.2 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 2*. 1976.
- 27 M. Bakker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, S.J. Polak, M. van Veldhuizen. *Colloquium discretiseringsmethoden*. 1976.
- 28 O. Diekmann, N.M. Temme (eds.). *Nonlinear diffusion problems*. 1976.
- 29.1 J.C. Bus (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 1A, deel 1B*. 1976.
- 29.2 H.J.J. te Riele (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 2*. 1977.
- 30 J. Heering, P. Klint (red.). *Colloquium programmeeromgevingen*. 1983.
- 31 J.H. van Lint (red.). *Inleiding in de coderingstheorie*. 1976.
- 32 L. Geurts (red.). *Colloquium bedrijfssystemen*. 1976.
- 33 P.J. van der Houwen. *Berekening van waterstanden in zeeën en rivieren*. 1977.
- 34 J. Hemelrijk. *Oriënterende cursus mathematische statistiek*. 1977.
- 35 P.J.W. ten Hagen (red.). *Colloquium computer graphics*. 1978.
- 36 J.M. Aarts, J. de Vries. *Colloquium topologische dynamische systemen*. 1977.
- 37 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita datastructures*. 1978.
- 38.1 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part I*. 1979.
- 38.2 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part II*. 1979.
- 39 O.J. Vrieze, G.L. Wanrooy. *Colloquium stochastische spelen*. 1978.
- 40 J. van Tiel. *Convexe analyse*. 1979.
- 41 H.J.J. te Riele (ed.). *Colloquium numerical treatment of integral equations*. 1979.
- 42 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita implementatie van programmeertalen*. 1980.
- 43 A.M. Cohen, H.A. Wilbrink. *Eindige groepen (een inleidende cursus)*. 1980.
- 44 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium numerical solution of partial differential equations*. 1980.
- 45 P. Klint (red.). *Colloquium hogere programmeertalen en computerarchitectuur*. 1980.
- 46.1 P.M.G. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 1*. 1981.
- 46.2 P.M.G. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 2*. 1981.
- 47.1 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60: general information and indices*. 1981.
- 47.2 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 1: elementary procedures; vol. 2: algebraic evaluations*. 1981.
- 47.3 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3A: linear algebra, part I*. 1981.
- 47.4 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3B: linear algebra, part II*. 1981.
- 47.5 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 4: analytical evaluations; vol. 5A: analytical problems, part I*. 1981.
- 47.6 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 5B: analytical problems, part II*. 1981.
- 47.7 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 6: special functions and constants; vol. 7: interpolation and approximation*. 1981.
- 48.1 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 1*. 1982.
- 48.2 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 2*. 1982.
- 49 T.H. Koornwinder (ed.). *The structure of real semisimple Lie groups*. 1982.
- 50 H. Nijmeijer. *Inleiding systeemtheorie*. 1982.
- 51 P.J. Hoogendoorn (red.). *Cursus cryptografie*. 1983

CWI SYLLABI

- 1 Vacantiecursus 1984: *Hewet - plus wiskunde*. 1984.
- 2 E.M. de Jager, H.G.J. Pijls (eds.). *Proceedings Seminar 1981-1982. Mathematical structures in field theories*. 1984.
- 3 W.C.M. Kallenberg, et al. *Testing statistical hypotheses: worked solutions*. 1984.
- 4 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 1*. 1984.
- 5 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 2*. 1984.
- 6 P.J.M. Bongaarts, J.N. Buur, E.A. de Kerf, R. Martini, H.G.J. Pijls, J.W. de Roever. *Proceedings Seminar 1982-1983. Mathematical structures in field theories*. 1985.
- 7 Vacantiecursus 1985: *Variatierekening*. 1985.
- 8 G.M. Tuynman. *Proceedings Seminar 1983-1985. Mathematical structures in field theories, Vol.1 Geometric quantization*. 1985.
- 9 J. van Leeuwen, J.K. Lenstra (eds.). *Parallel computers and computations*. 1985.
- 10 Vacantiecursus 1986: *Matrices*. 1986.
- 11 P.W.H. Lemmens. *Discrete wiskunde: tellen, grafen, spelen en codes*. 1986.
- 12 J. van de Lune. *An introduction to Tauberian theory: from Tauber to Wiener*. 1986.
- 13 G.M. Tuynman, M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings Seminar 1983-1985. Mathematical structures in field theories, Vol.2*. 1987.
- 14 Vacantiecursus 1987: *De personal computer en de wiskunde op school*. 1987.
- 15 Vacantiecursus 1983: *Complexe getallen*. 1987.
- 16 P.J.M. Bongaarts, E.A. de Kerf, P.H.M. Kersten. *Proceedings Seminar 1984-1986. Mathematical structures in field theories, Vol.1*. 1988.
- 17 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1985-1987*. 1988.
- 18 Vacantiecursus 1988. *Differentierekening*. 1988.
- 19 R. de Bruin, C.G. van der Laan, J. Luyten, H.F. Vogt. *Publiceren met LATEX*. 1988.
- 20 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 1*. 1988.
- 21 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 2*. 1988.
- 22 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 3*. 1988.
- 23 J. van Mill, G.Y. Nieuwland (eds.). *Proceedings van het symposium wiskunde en de computer*. 1989.
- 24 P.W.H. Lemmens (red.). *Bewijzen in de wiskunde*. 1989.
- 25 Vacantiecursus 1989: *Wiskunde in de Gouden Eeuw*. 1989.
- 26 G.G.A. Bäuerle et al. *Proceedings Seminar 1986-1987. Mathematical structures in field theories*. 1990.
- 27 Vacantiecursus 1990: *Getallentheorie en haar toepassingen*. 1990.
- 28 Vacantiecursus 1991: *Meetkundige structuren*. 1991.
- 29 A.G. van Asch, F. van der Blij. *Hoeken en hun Maat*. 1992.
- 30 M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings seminar 1986-1987. Lectures on Kac-Moody algebras*. 1992.
- 31 Vacantiecursus 1992: *Systeemtheorie*. 1992.
- 32 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1987-1992*. 1992.
- 33 P.W.H. Lemmens (ed.). *Meetkunde van kunst tot kunde, vroeger en nu*. 1993.
- 34 J.H. Kruizinga. *Toegepaste wiskunde op een PC*. 1992.
- 35 Vacantiecursus 1993: *Het reële getal*. 1993.
- 36 Vacantiecursus 1994: *Computeralgebra*. 1994.
- 37 G. Alberts. *Wiskunde en praktijk in historisch perspectief. Syllabus*. 1994.
- 38 G. Alberts, J. Schut (eds.). *Wiskunde en praktijk in historisch perspectief. Reader*. 1994.
- 39 E.A. de Kerf, H.G.J. Pijls (eds.). *Proceedings Seminar 1989-1990. Mathematical structures in field theory*. 1996.
- 40 Vacantiecursus 1995: *Kegelsneden en kwadratische vormen*. 1995.
- 41 Vacantiecursus 1996: *Chaos* 1996.